

## ÇALIŞMA SORULARI-5

1. Aşağıda verilen diferensiyel denklemleri, birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin eşdeğer bir sistemine dönüştürünüz.

- $x'' - 7x' - 9x = t + 3$
- $x^{(4)} + 9x'' - 9x' + x = \sin 3t$
- $x^{(6)} + 9x^{(4)} - 9x'' + x = e^{5t}$
- $x''' + x'' - 9x' + x = e^{5t}$

2. Verilen homojen lineer sistemlerin genel çözümlerini yok etme (eliminasyon) yöntemi ile bulunuz. Eğer başlangıç koşulları verilmişse, bu başlangıç şartlarına karşılık gelen özel çözümü bulunuz.

- $x' = y; y' = -x$
- $x' = -2y, y' = 2x; x(0) = 1, y(0) = 0$
- $x' = \frac{1}{2}y, y' = -8x$
- $x' = y, y' = 6x - y; x(0) = 1, y(0) = 2$
- $x' = -y, y' = 13x + 4y; x(0) = 0, y(0) = 2$
- $x' = y, y' = -9x + 6y$
- $x' = x - y, y' = y - 4x$
- $x' + 2y = 0, x' - y' = 0$

3. Verilen matrislerin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

a.  $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b.  $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

d.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

e.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

f.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

g.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

h.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

i.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

j.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

k.  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

l.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

m.  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Verilen başlangıç değer problemlerini özdeğer - özvektör yöntemi ile çözünüz. (Burada,  $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  ve

$X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$  dir )

a.  $X' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

b.  $X' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \end{bmatrix}$

c.  $X' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d.  $X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. Verilen sistemleri özdeğer - özvektör yöntemi ile çözünüz. (Burada,  $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  ve  $X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$  dir )

a.  $X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} X$

$$\text{b. } X' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} X$$

$$\text{c. } X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X$$

$$\text{d. } X' = \begin{bmatrix} 25 & 12 & 0 \\ -18 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 13 \end{bmatrix} X \quad (\text{Özdeğerler: } \lambda = 7, 13, 13)$$

$$\text{e. } X' = \begin{bmatrix} -19 & 12 & 84 \\ 0 & 5 & 0 \\ -8 & 4 & 33 \end{bmatrix} X \quad (\text{Özdeğerler: } \lambda = 9, 5, 5)$$

$$\text{f. } X' = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X \quad (\text{Özdeğerler: } \lambda = 2, 2, 2)$$

$$\text{g. } X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} X \quad (\text{Özdeğerler: } \lambda = 1, 1, 1)$$

$$6. \text{ Doğrulayınız ki } X_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X_3 = \begin{bmatrix} -e^{-3t} \\ -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \text{ vektör fonksiyonları}$$

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

sisteminin  $(-\infty, \infty)$  aralığında bir çözümdür. ( Not: Burada,  $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$  ve  $X' = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix}$  dir )

7. Verilen her bir  $X' = AX$  sistemi için  $e^{At}$  üstel matrisini bulunuz.

$$\text{e. } x' = 5x - 4y, \quad y' = 2x - y$$

$$\text{f. } x' = 5x - 3y, \quad y' = 2x$$

$$\text{g. } x' = 9x - 8y, \quad y' = 6x - 5y$$

$$\text{h. } x' = 9x + 2y, \quad y' = 2x + 6y$$

8. Verilen sistemleri üstel matris yöntemi ile çözünüz.

$$\text{i. } X' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{j. } X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{k. } X' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{l. } X' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

9. Verilen her bir sistem için temel matrislerini bulunuz ve sonra temel matris çözümlerini bulunuz.

$$\text{n. } X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{o. } X' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{p. } X' = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{q. } X' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} X, X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10. Verilen matrisler için  $e^{At}$  üstel matrisini bulunuz.

$$\text{e. } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{f. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g. } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{h. } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

11.  $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$  matrisinin nilpotent olduğunu gösteriniz ve bunu  $e^{At}$  üstel matrisini bulmak için kullanınız.

12.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$  matrisinin nilpotent olduğunu gösteriniz ve bunu  $e^{At}$  üstel matrisini bulmak için kullanınız.

MAT 203 Çalışma Soruları-5