CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2019-2020 GÜZ DÖNEMİ
MAT 203, LİNEER CEBİR VE DİFERENSİYEL DENKLEMLERE GİRİŞ, ARASINAV
18 EKİM 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (20 p.)	4. (20 p.)	5. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + 5$ eğri ailesini çözüm kabul eden diferensiyel denklemi bulunuz.

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + 5$$

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x \longrightarrow \boxed{c_2 = \frac{y'' - y'''x}{2}}$$

$$y''' = 6c_3 \longrightarrow \boxed{c_3 = \frac{y'''}{6}}$$

$$y' = c_1 + x(y'' - y'''x) + \frac{y'''x^2}{2} \Rightarrow c_1 = y' - x(y'' - y'''x) - \frac{y'''x^2}{2}$$

$$= y' - xy'' + x^2y''' - \frac{y'''x^2}{2}$$

$$\boxed{c_1 = y' - xy'' + \frac{y'''x^2}{2}}$$

$$y = \left[y' - xy'' + \frac{y'''x^2}{2}\right]x + \left[\frac{y'' - y'''x}{2}\right]x^2 + \left[\frac{y'''}{6}\right]x^3 + 5$$

$$= y'x - x^2y'' + \frac{x^3y'''}{2} + \frac{x^2y'' - x^3y'''}{2} + \frac{x^3y'''}{6} + 5$$

$$\boxed{y = y'x - \frac{x^2y''}{2} + \frac{x^3y'''}{6} + 5}$$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \cos\left(\dfrac{x-y}{x}\right)$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left[\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow y = x.v \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}\ \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \cos\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \cos(1-v)$$

$$\frac{dv}{\cos(1-v)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \sec(1-v)\,dv = \int \frac{dx}{x} \qquad \left[\ 1-v = m \quad -dv = dm\ \right]$$

$$-\int \sec(m)\,dm = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int \sec(m).\frac{\tan(m)+\sec(m)}{\tan(m)+\sec(m)}\,dm = -\int \frac{\sec(m).\tan(m)+\sec^2(m)}{\tan(m)+\sec(m)}\,dm = \int \frac{dx}{x}$$

$$\left[\ \tan(m)+\sec(m) = w \quad (\sec^2(m)+\sec(m)\tan(m))\,dm = dw\ \right] \Rightarrow -\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|w| = \ln|x| + \ln c \Rightarrow \frac{1}{|w|} = e^{xc} \Rightarrow \frac{1}{|\tan(m)+\sec(m)|} = e^{xc}$$

$1-v=m$

$$\frac{1}{|\tan(1-v)+\sec(1-v)|} = e^{xc} \quad \frac{y}{x}=v \quad \Rightarrow \frac{1}{\left|\tan\left(1-\frac{y}{x}\right)+\sec\left(1-\frac{y}{x}\right)\right|} = e^{xc}$$

$$\therefore \left|\tan\left(1-\frac{y}{x}\right)+\sec\left(1-\frac{y}{x}\right)\right| = e^{-xc}$$

2. $3xy' + y = -x^2y^4$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$3xy' + y = -x^2 y^4 \quad , x \neq 0$$

$$y' + \frac{1}{3x} = -\frac{x}{3} y^4 \qquad (n=4, \text{ Bernoulli diferensiyel denklemi})$$

$$u = y^{-3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} = y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-4}y' + \frac{1}{3x}\cdot y^{-3} = -\frac{x}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} + \frac{1}{3x}\cdot u = -\frac{x}{3}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = x \quad , \quad \lambda = e^{\int -\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}\cdot u = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(u\cdot\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$u\cdot\frac{1}{x} = \int dx + C$$

$$u\cdot\frac{1}{x} = x + C \Rightarrow u = x^2 + Cx$$

$$y^{-3} = x^2 + Cx$$

$$\therefore y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + Cx}} \quad , x^2 + Cx \neq 0$$

3. $ydx - xdy = y^2e^x dx$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\underbrace{(y - y^2e^x)}_{M}dx - \underbrace{x}_{N}dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = 1 - 2e^x y \\ N_x = -1 \end{array}\right\} \neq \quad \text{TAM DİFERENSİYEL DENKLEM DEĞİLDİR!}$$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-1 - 1 + 2e^x y}{y - y^2e^x} = \frac{-2 + 2e^x y}{y - y^2e^x} = \frac{-2\cancel{(1-e^x y)}}{y\cancel{(1-e^x y)}} = \frac{-2}{y}$$

$$\lambda = \lambda(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}$$

Denklemin her iki tarafını $\frac{1}{y^2}$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{y^2}(y - y^2e^x)dx - \frac{1}{y^2}x\,dy = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{y} - e^x\right)}_{\tilde{M}}dx - \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{\tilde{N}}dy = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} \tilde{M}_y = -\frac{1}{y^2} \\ \tilde{N}_x = -\frac{1}{y^2} \end{array}\right\} = \text{ olduğundan TAM dif. denk.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \tilde{M} \Longrightarrow F(x,y) = \int\left(\frac{1}{y} - e^x\right)dx = \frac{x}{y} - e^x + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x}{y^2} + h'(y) = \frac{-x}{y^2} = \tilde{N} \Longrightarrow h'(y) = 0$$

$$h(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{F(x,y) = \frac{x}{y} - e^x = C}$$

4. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$ olduğuna göre A^{-1} varsa bu matrisi A matrisinin adjoint (ek) matrisinden yararlanarak bulunuz.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \sin\alpha$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sin\alpha$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\alpha$

2. satıra göre determinantı açalım:

$\det(A) = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$

$= (0).(0) + (1)(1) + (0).(0) = 1$

$\det(A) \neq 0$ olduğundan A^{-1} mevcuttur.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . Adj(A) \quad \ni \quad Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

5. (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbf{R}, z = x + y \right\}$ olduğuna göre W kümesinin $\mathbf{R}^3$ vektör uzayının bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

• $w_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \ w_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ olsun öyle ki $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$

$$w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ (x_1+y_1) + (x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ (x_1+x_2) + (y_1+y_2) \end{bmatrix} \in W \ ✓$$

• $$c.w = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ c(x_1+y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cx_1 + cy_1 \end{bmatrix} \in W \ ✓$$

$\therefore$ W, alt vektör uzayıdır.

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin $\mathbf{R}^3$ vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.

• Lineer Bağımsızlık

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{array}\right\} \ c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Lineer bağımsız ✓

• Germe

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_3 = a \\ c_2 + 2c_3 = b \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_3 = a \\ c_2 = b - 2a \\ c_1 = c + a - 2b \end{array} \ ✓$$

$\therefore$ S, $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının bir tabanıdır.