TOBB ETÜ	**TOBB ETÜ EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ** **MAT 203 Lineer Cebir ve Diferensiyel Denklemlere Giriş Ara Sınavı 05.07.2018**
	Ad-Soyad: **No:** **Bölüm:** **İmza:** **Süre:** *100 dk*

1	2	3	4	5	6	Total:

SORULAR: ***(Tam puan almak için gerekli tüm adımların yazılması gerekmektedir)***

1) (15 puan) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $det(A)$ hesaplayınız.

1. sütuna göre açalım: $det(A) = 4.(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4.(-1).(-15) = 60$

b) A matrisinin tersini (varsa) adjoint (eki) yöntemi ile bulunuz.

$det(A) = 60 \neq 0$ olduğundan tersi vardır. $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} . ek(A)$

$ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) (15 puan) $y^{(4)} - 4y^{(2)} = \sinh 2x + 2x^2$ denkleminin $y_p(x)$ özel çözümünün uygun formunu oluşturunuz fakat katsayılarının değerlerini bulmayınız.

$y^{(4)} - 4y^{(2)} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x^2$ denklemin önce homogen kısmının çözümünü bulalım. $k^4 - 4k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k^2 - 4) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0 \quad k_3 = 2 \quad k_4 = -2$

$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$

$\sinh 2x : \{e^{2x}, e^{-2x}\} \rightarrow \{xe^{2x}, xe^{-2x}\}$

$x^2 : \{x^2, x, 1\} \rightarrow \{x^4, x^3, x^2\}$

$y_p(x) = Axe^{2x} + Bxe^{-2x} + Cx^4 + Dx^3 + Ex^2$

3) **(15 puan)** Wronskian determinant testini kullanarak $f_1(x)=e^{-3x}, f_2(x)=\cos 2x, f_3(x)=\sin 2x$ fonksiyonlarının $(-\infty,\infty)$ aralığında *lineer bağımsız* olduğunu gösteriniz.

$$W=\begin{vmatrix} e^{-3x} & \cos 2x & \sin 2x \\ -3e^{-3x} & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 9e^{-3x} & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix}$$

1. satırın 4 katını 3. satıra ekleyelim

$$=\begin{vmatrix} e^{-3x} & \cos 2x & \sin 2x \\ -3e^{-3x} & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 13e^{-3x} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. satıra göre determinant hesaplarsak;

$$=13.e^{-3x}\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 26e^{-3x} \neq 0$$

fonksiyonlar lineer bağımsız

4) **(15 puan)** $\dfrac{dx}{dt}+tx^3+\dfrac{x}{t}=0$ Bernoulli diferansiyel denklemi olduğunu gösteriniz ve çözümünü bulunuz.

$$\frac{dx}{dt}+\underbrace{\frac{1}{t}}_{P(t)}x=\underbrace{-t}_{Q(t)}x^3$$

$n=3$ olmak üzere $u=x^{1-3}=x^{-2}$ dönüşümünü ele alalım. $\dfrac{du}{dt}=-2x^{-3}\dfrac{dx}{dt}$ olup eşitliğin her iki tarafını $-2x^{-3}$ ile çarpalım:

$$-2x^{-3}\frac{dx}{dt}-\frac{2}{t}x^{-2}=2t \Rightarrow \frac{du}{dt}-\frac{2}{t}u=2t$$

1. mertebede lineer homojen olmayan D.D.

$$\lambda=e^{\int -\frac{2}{t}dt}=e^{-2\ln t}=t^{-2}$$ ile denklemin her iki tarafını

çarpalım: $$t^{-2}\frac{du}{dt}-2t^{-3}u=2t^{-1}$$

$$\int \cancel{\frac{d}{dt}}(u.t^{-2})=\int \frac{2}{t}$$

$$u.t^{-2}=2\ln|t|+C$$

$$u=t^2(2\ln|t|+C)$$

$$\boxed{x^{-2}=t^2(2\ln|t|+C)}$$

5) **(20 puan)** $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=4x-8;\ y(1)=4,\ y'(1)=-1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Cauchy-Euler Dif. Denk. için $x=e^t$ dönüşümünü ele alalım

$x=e^t \Rightarrow \ln x = t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\underbrace{\frac{dt}{dx}}_{1/x}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{-dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

eşitliklerini denklemde yerine yazalım!

$$\cancel{x^2}\frac{1}{\cancel{x^2}}\left(-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)-2y=4e^t-8 \Rightarrow y''-y'-2y=4e^t-8$$ elde edilir.

Bu denklemin önce homojen kısmını çözelim:

$k^2-k-2=0 \Rightarrow k_1=2\ k_2=-1$, $y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}$

$$\left.\begin{aligned}y_p(t)&=Ae^t+B\\ y_p'(t)&=Ae^t\\ y_p''(t)&=Ae^t\end{aligned}\right\}\ \cancel{Ae^t}-\cancel{Ae^t}-2Ae^t-2B=4e^t-8 \Rightarrow A=-2\ \ B=2$$

$y_p(t)=-2e^t+4$

Genel Çözüm: $y(x)=c_1\cdot\frac{1}{x}+c_2\cdot x^2-2x+4$

$y(1)=4 \Rightarrow 4=c_1+c_2-2+4 \Rightarrow c_1+c_2=2$

$y'(1)=-1 \Rightarrow -1=-c_1+2c_2-2 \Rightarrow -c_1+2c_2=1$

$+$ ———

$3c_2=3 \Rightarrow c_2=1$

$c_1=1$ bu

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{x}+x^2-2x+4}$$

6) **(20 puan)** $y''+9y=2\sec 3x$ denklemini **parametrelerin değişimi yöntemini** kullanarak çözünüz.

$y''+9y=0$ homogen kısmının çözümünü bulalım:

$k^2+9=0 \Rightarrow k^2=-9 \Rightarrow k_{1,2}=\mp 3i \qquad y_h(x)=c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)$

$y_p(x)=u_1(x)\cos(3x)+u_2(x)\sin(3x)$ olsun.

$y_p'(x)=\underbrace{u_1'(x)\cos(3x)+u_2'(x)\sin(3x)}_{0}-3u_1(x)\sin(3x)+3u_2(x)\cos(3x)$

$y_p''(x)=-3u_1'(x)\sin(3x)+3u_2'(x)\cos(3x)-9u_1(x)\cos(3x)-9u_2(x)\sin(3x)$

eşitlikleri denklemde yerine yazalım:

$-3u_1'(x)\sin(3x)+3u_2'(x)\cos(3x)\cancel{-9u_1(x)\cos(3x)}\cancel{-9u_2(x)\sin(3x)}$

$\cancel{+9u_1(x)\cos(3x)}\cancel{+9u_2(x)\sin(3x)}=2\sec 3x$

$3\sin(3x)/\ u_1'(x)\cos(3x)+u_2'(x)\sin(3x)=0$

$\cos(3x)/\ -3u_1'(x)\sin(3x)+3u_2'(x)\cos(3x)=2\sec 3x$

$+$

$u_2'(x)\,[\underbrace{3\sin^2(3x)+3\cos^2(3x)}_{3}]=2.\cancel{\sec 3x}.\cancel{\cos 3x}$

$u_2'(x)=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{u_2(x)=\frac{2x}{3}}$ bulunur.

$u_1'(x)\cos(3x)+u_2'(x)\sin(3x)=0 \Rightarrow u_1'(x)=-\frac{2}{3}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$

$\Rightarrow \boxed{u_1(x)=\frac{2}{9}\ln|\cos 3x|}$

Genel Çözüm: $y(x)=c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)+\frac{2}{9}\ln|\cos 3x|.\cos(3x)$

$+\frac{2x}{3}.\sin(3x)$