TOBB ETÜ

TOBB ETÜ EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

MAT 203 Lineer Cebir ve Diferensiyel Denklemlere Giriş Final Sınavı 16.08.2017

Ad-Soyad: **No:**

Bölüm: **İmza:** **Süre:** ***110 dk***

1	2	3	4	5	6	Total:

QUESTIONS:

1) (15 puan) $y^{(8)}+18y^{(6)}+81y^{(4)}=0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y=e^{rx}$, $y^{(4)}=r^4e^{rx}$, $y^{(6)}=r^6e^{rx}$, $y^{(8)}=r^8e^{rx}$ olmak üzere

$r^8e^{rx}+18r^6e^{rx}+81r^4e^{rx}=0$

$e^{rx}(r^8+18r^6+81r^4)=0$

$r^8+18r^6+81r^4=0$ Karakteristik Denklem

$r^4(r^4+18r^2+81)=0$

$r^4(r^2+9)^2=0$

$r_1=r_2=r_3=r_4=0$, $r_5=r_6=3i$, $r_7=r_8=-3i$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}, x^3e^{0x} $e^{0x}\cos 3x$, $e^{0x}\sin 3x$

$xe^{0x}\cos 3x$, $xe^{0x}\sin 3x$

$y(x)=e^{0x}(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)+e^{0x}\left[(c_5+c_6x)\cos 3x+(c_7+c_8x)\sin 3x\right.$

2) (5+15 puan) a) $A=\begin{bmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{bmatrix}$ matrisinin nilpotent olduğunu gösteriniz

! Eğer $A^n=0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{Z}$ var ise A matrisi nilpotenttir.

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&-1\\0&3&-1\\0&9&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A.A^2=\begin{bmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&-1\\0&3&-1\\0&9&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$A^3=0$ olup A matrisi nilpotenttir.

b) **(a)** daki A matrisini kullanarak, $X' = AX$ diferensiyel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Verilen dif. denklemin çözümü, $x(t) = e^{At}\cdot x_0$ dır.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \underbrace{\frac{A^3t^3}{3!} + \dots}_{0}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t & 5t+\frac{3t^2}{2} & -2t-\frac{t^2}{2} \\ t & 1+2t+\frac{3t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2} \\ 3t & 6t+\frac{9t^2}{2} & 1-3t-\frac{3t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At}\cdot x(0) = \begin{bmatrix} (1+t)c_1 + (5t+\frac{3t^2}{2})c_2 - (2t+\frac{t^2}{2})c_3 \\ t\,c_1 + (1+2t+\frac{3t^2}{2})c_2 - (t+\frac{t^2}{2})c_3 \\ 3t\,c_1 + (6t+\frac{9t^2}{2})c_2 + (1-3t-\frac{3t^2}{2})c_3 \end{bmatrix}$$

$x(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

3) **(5+10 puan)** $(2y^2-6xy)dx+(3xy-4x^2)dy=0$ denklemi veriliyor.

a) Verilen denklemin tam **olmadığını** gösteriniz.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ diferansiyel denklemi için $M_y = N_x$ ise denklem tamdır.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 2y^2-6xy \\ N(x,y) &= 3xy-4x^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &M_y \stackrel{?}{=} N_x \\ &M_y = 4y-6x \neq 3y-8x = N_x \end{aligned}$$

olduğundan denklem tam değildir.

b) ***Denklemi tam yapmak için***, denklemin her iki tarafını $x^n y^m$ ile çarparak, m ve n sayılarını bulunuz.

$x^n y^m(2y^2-6xy)\,dx + x^n y^m(3xy-4x^2)\,dy = 0$ denklemi için

$$\frac{d}{dy}\left[(x^n y^m)\cdot M(x,y)\right] = \frac{d}{dx}\left[(x^n y^m)\cdot N(x,y)\right]$$

gerçekleştiğinde denklem tam olacaktır. Buradan,

$$(mx^n y^{m-1})(2y^2-6xy)+(x^n y^m)(4y-6x) = (nx^{n-1}y^m)(3xy-4x^2)+x^n y^m(3y-8x)$$

$(x^{n-1}y^{m-1})$ terimi sadeleştirildiğinde ise,

$$(mx)(2y^2-6xy)+xy(4y-6x) = (ny)(3xy-4x^2)+xy(3y-8x)$$

$$2mxy^2-6m\underline{x^2y}+4xy^2-6\underline{x^2y} = 3nxy^2-4n\underline{x^2y}+3xy^2-8\underline{x^2y}$$

$$(2m+4)xy^2+x^2y(-6m-6) = xy^2(3n+3)+x^2y(-4n-8)$$

$$\left.\begin{aligned} 2m+4 &= 3n+3 \\ -6m-6 &= -4n-8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2m-3n &= -1 \\ -6m+4n &= -2 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned} m&=1 \\ n&=1 \end{aligned} \Rightarrow x^n y^m = xy \text{ olacaktır.}$$

4) (15 puan) $X' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} X$ sistemini özdeğer - özvektör ile çözünüz. (Burada, $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ve $X' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$ dir)

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(-3-\lambda) + 16 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \quad \left(\begin{array}{c} \text{2 katlı} \\ \text{Hatalı} \\ \text{özdeğer} \end{array} \right)$$

- $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$ için $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alalım

- $(A - \lambda I) v_2 = v_1$

  $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Burada $\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$ olup lineer bağımsızdır.

Bu $x' = Ax$ sistemi için
$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}$$
$$x_2(t) = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t}$$
lineer bağımsız çözümleri yazılır.

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 4e^t \\ 4e^t \end{bmatrix}$$

$$x_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t = \begin{bmatrix} (4t+1)e^t \\ 4t \cdot e^t \end{bmatrix}$$

O halde genel çözüm
$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4e^t \\ 4e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} (4t+1)e^t \\ 4t \cdot e^t \end{bmatrix}$$
$$x_1(t) = e^t (4c_1 + 4tc_2 + c_2)$$
$$x_2(t) = e^t (4c_1 + 4tc_2)$$

5) (15 puan) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$ denklem sistemindeki z 'yi <u>*Cramer metodu*</u> ile bulunuz.

Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{dir.}$$

$\det A \neq 0$ olduğundan verilen denklem sistemi Cramer sistemidir. Öyleyse,

$$z = \frac{1}{-4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{olacaktır.}$$

6) (20 puan) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$ denklemini **parametrelerin değişimi yöntemini** kullanarak çözünüz.

Verilen denklemin homojen kısmı $y'' - 3y' + 2y = 0$ olup karakteristik denklemi ise,

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad , \quad e^{rx}$$

$$(r-2)(r-1) = 0$$

$$e^{2x} \; , \; e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x}$$

$$y_p(x) = u_1 e^{2x} + u_2 e^x \quad , \quad u_1 = ? \quad u_2 = ?$$

$$\begin{cases} u_1' e^{2x} + u_2' e^x = 0 \\ u_1' 2e^{2x} + u_2' e^x = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{e^{2x}}{e^x+1} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{-\cancel{e^{3x}}}{e^x+1}}{e^{3x} - 2e^{3x}} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$u_1' = \frac{1}{e^x+1} \Rightarrow \int u_1' \, dx = \int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx$$

$$u_1 = \int \frac{1+e^x}{1+e^x} dx + \int \frac{-e^x}{1+e^x} dx$$

$$\boxed{u_1(x) = x - \ln(1 + e^x)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^{4x}}{e^x+1}}{-e^{3x}} = \frac{-e^x}{e^x+1}$$

$$u_2' = \frac{-e^x}{e^x+1} \Rightarrow \int u_2' \, dx = \int \frac{-e^x}{e^x+1} dx = -\ln|e^x + 1|$$

$$\boxed{u_2(x) = -\ln|e^x + 1|}$$

$$y_p(x) = \left(x - \ln(1+e^x)\right) e^{2x} + \left(-\ln(e^x+1)\right) e^x \quad \text{ve} \quad y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

Başarılar Dilerim, Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN