TOBB ETÜ

TOBB ETÜ EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

MAT 203 Lineer Cebir ve Diferensiyel Denklemlere Giriş Arasınavı 01.07.2017

Ad-Soyad: **No:** **Süre:** ***110 dk***

Bölüm: **İmza:**

1	2	3	4	5	6	Total:

SORULAR: (Tam puan almak için gerekli tüm adımların yazılması gerekmektedir)

1) **(5+12 puan)** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8 \\ -x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-7x_2+4x_3=10 \end{cases}$ denklem sistemi veriliyor.

a) Verilen sistemin ilaveli matrisini yazınız.

Bu lineer denklem sisteminin ilaveli matrisi ;

$$Ax=b \Rightarrow [A:b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

b) **(a)** daki ilaveli matrise elementer satır işlemleri uygulayarak, sistemin çözümünü Gauss-Eliminasyon yöntemi ile bulunuz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right) \underset{-3R_1+R_3\to R_3}{\overset{R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right) \overset{(-1)R_2\to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right) \overset{10R_2+R_3\to R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{52}R_3\to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Bu matrisin gösterdiği Lineer denklem sisteminden

$x_1+x_2+2x_3=8 \Rightarrow x_1=3$

$x_2-5x_3=-9 \Rightarrow x_2=1$

$x_3=2$

$\therefore \begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=1 \\ x_3=2 \end{matrix}$ elde edilir.

2) **(15 puan)** $\underbrace{\left(e^x\sin y-3x^2\right)}_{M(x,y)}dx+\underbrace{\left(e^x\cos y+\frac{y^{-2/3}}{3}\right)}_{N(x,y)}dy=0$ diferensiyel denklemlerin tam olduğunu gerçekleyiniz ve sonra çözünüz.

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \qquad M_y=N_x \Rightarrow$ TAM DİF.

$M(x,y)=e^x\sin y-3x^2 \Rightarrow M_y=e^x\cos y$

$N(x,y)=e^x\cos y+\frac{y^{-2/3}}{3} \Rightarrow N_x=e^x\cos y$] eşit olup denklem tamdır.

O halde $\exists\, H(x,y)$ fonksiyonu vardır $\ni \begin{cases} H_x=M(x,y) & \dots(1) \\ H_y=N(x,y) & \dots(2) \end{cases}$

$H_x=e^x\sin y-3x^2 \Rightarrow H(x,y)=e^x\sin y-x^3+\varphi(y) \quad \dots(3)$

$H_y=e^x\cos y+\frac{y^{-2/3}}{3}$

(3) denkleminin türevini alıp (2)'ye eşitler ise

$e^x\cos y+\varphi'(y)=e^x\cos y+\frac{y^{-2/3}}{3} \Rightarrow \varphi(y)=y^{1/3}$

$\therefore H(x,y)=e^x\sin y-x^3+y^{1/3}=C$ verilen denklemi genel çözümüdür

3) **(15 puan)** $y^{(3)} - 9y'' + 15y' + 25y = 3e^{-x} + \sin x - 4e^{5x}$ denkleminin $y_p(x)$ özel çözümünün <u>uygun formunu oluşturunuz</u> fakat katsayılarının değerlerini <u>bulmayınız.</u>

$y^{(3)} - 9y'' + 15y' + 25y = 0 \Rightarrow y = e^{rx}$ homogen denk çözüm adayı

$r^3 - 9r^2 + 15r + 25 = 0$

$(r+1)(r-5)^2 = 0 \Rightarrow e^{-x}, \; e^{5x}, \; xe^{5x}$

$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} + c_3 x e^{5x}$

Bu diferansiyel denklemde $f(x) = 3e^{-x} + \sin x - 4e^{5x}$ olduğundan özel çözümü,

$y_p(x) = Axe^{-x} + B\sin x + C\cos x + De^{5x} \cdot x^2$ formunda oluşturulur

4) **(15 puan)** $\dfrac{dy}{dx} + y^3 x + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y' + y = -xy^3 \quad \cdots (1)$ Bernouilli Dif Denk.

(1) denkleminin her iki tarafını y^{-3} ile çarpalım

$y^{-3}y' + y^{-3}y = -x$

$y^{-3}y' + y^{-2} = -x$

$z = y^{-2}$ dönüşümü yapılır.

$z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y' = \dfrac{-y^3}{2} z'$

$-\dfrac{y^3}{2} z' + y = -xy^3$

$z' - 2y^{-2} = 2x$

$z' - 2z = 2x$ (Lineer D.)

$\mu(x) = e^{\int -2\,dx} = e^{-2x}$ integral çarpanı ile denklemi çarpalım.

$\dfrac{d}{dx}\left[e^{-2x} \cdot z\right] = 2x \cdot e^{-2x}$

$\int \dfrac{d}{dx}\left[e^{-2x} \cdot z\right] = \int 2x \cdot e^{-2x}\,dx$

$e^{-2x} \cdot z = e^{-2x}\left(-x - \tfrac{1}{2}\right) + C$

$z = -x - 1/2 + ce^{2x}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{-x - 1/2 + ce^{2x}}}$

5) **(18 puan)** $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4x\dfrac{dy}{dx}+6y=0;\ y(2)=0,\ y'(2)=4$ **başlangıç değer problemini çözünüz.**

$x^2y''-4xy'+6y=0$ (2. mertebe Cauchy Euler Denklemi)

$x=e^t$, $t=\ln x$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=x\frac{dy}{dx}\quad\ldots(1)$$

$$\rightarrow\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\quad\ldots(2)$$

(1) ve (2) denklemde yazılırsa,

$$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=0$$ (2. mertebe sbt katsayılı)

$r^2-5r+6=0$, $y=e^{rx}$ çözüm adayı oü.

$(r-3)(r-2)=0$

$r_1=3\quad r_2=2$

$y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{2t}$

$x=e^t$ olup

$y(x)=c_1x^3+c_2x^{+2}$ (genel çözüm)

$y'(x)=3c_1x^2+2c_2x$

$y(2)=0 \Rightarrow y(2)=8c_1+4c_2=0$

$y'(2)=4 \Rightarrow y'(2)=12c_1+4c_2=4$

$c_1=1\ ,\ c_2=-2$

$\therefore\ y(x)=x^3+(-2)x^2$

6) **(7+13 puan)** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$A=[a_{ij}]$ n. merteben bir kare matris olmak üzere

$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$

↳ i-inci satır açılımı

↳ A_{ij} : a_{ij} nin kofaktörü

a) $det(A)$ hesaplayınız.

$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ (3. satır açılımı)

$= 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0 + (-7) + 4 = -3$

b) A matrisinin tersini (varsa) <u>adjoint (eki) yöntemi</u> ile bulunuz.

$\det A = -3 \neq 0$ olup A matrisi tersinir matristir.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj(A) = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & -7 & 4 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & 5/3 \\ -2/3 & -1/3 & 7/3 \\ 2/3 & 1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$