Lineer Cebir

Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN

TOBB

İçerik:

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

1.1. Lineer Eşitliklerin Tanımı

$x_1, x_2, \ldots, x_n$'in n değişkeni tanımladığını varsayalım.

Eğer n değişkenden oluşan bir eşitlik,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa bu eşitlik lineer (doğrusal) bir eşitlik olarak tanımlanmaktadır.

Eşitlikte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b sabitleri ifade etmektedir.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

- Bir lineer eşitlikte, tüm değişkenler birinci dereceden olmalıdır. Değişkenler birbirinin çarpımı veya bölümü şeklinde ifade edilemezler.

- Eğer bir eşitlik lineer (doğrusal) değilse, doğrusal olmayan veya lineer olmayan eşitlik olarak adlandırılır.

- Bölümlerimizde bundan sonra lineer ve doğrusal ifadeleri aynı anlamda kullanılacaktır.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.1.

x, *y* ve *z*'nin değişken olduğu varsayılarak aşağıdaki eşitliklerin lineer (doğrusal) olup olmadığını belirleyiniz.

a) $\boldsymbol{x - y + z = 5}$

Doğrusal, çünkü *x*, *y* ve *z* birinci dereceden. Sabitler $\boldsymbol{a_1=1}$, $\boldsymbol{a_2=-1}$, $\boldsymbol{a_3=1}$ **ve** $\boldsymbol{b=5}$'tir.

b) $\boldsymbol{x + y - z^2 = 4}$

Doğrusal değil, çünkü z^2 birinci dereceden değil.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.1.(devamı)

c) $x + \sqrt{z} = 7$

Doğrusal değil, çünkü ***z*** 'nin karekökü vardır.

d) 3x + 5y – 2z = 0

Doğrusal, tüm değişkenler birinci dereceden ve

$a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = -2$ ve $b = 0$'dır.

e) x + yz + z = 5

Doğrusal değil, değişken yz çarpımı şeklinde olmamalıdır.

Bölüm 1 - Lineer Eşitlikler

Örnek: 1.1.(devamı)

f) $x/y + y - z = \pi$

Doğrusal değil, değişken x / y şeklinde ifade edilmemeli.

Lineer Denklem Sistemi

Genel olarak n bilinmeyenli m denklemli bir lineer denklem sistemi (kısaca lineer sistem) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.2}$$

Burada a_{ij} ler sabittir. $b_1, b_2 \ldots, b_n$ verildiğinde (1.2) yi sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini bulmaya çalışacağız. $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayılarının bu sistemin bir çözümü olması demek, bu sayıların her bir denklemin çözümü olması demektir. Eğer bir lineer sistemin hiç çözümü yoksa bu sisteme tutarsız, eğer en az bir çözümü varsa tutarlı denir. Eğer $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ise bu sisteme homojen sistem denir. Bir homojen sistemdeki $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ çözümüne trival (aşikar) çözüm denir. Aksi halde trival olmayan çözüm denir.

Lineer Denklem Sistemi

- *n* değişkenli iki veya daha fazla lineer eşitlikten oluşan bir sonlu kümeye lineer eşitlikler sistemi denir. Lineer denklem (eşitlikler) sistemimizde

  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \ldots, x_n = s_n$

  konulduğunda bu değerler tüm eşitlikleri sağlıyorsa, s_1, s_2, ..., s_n'e sistemin bir çözümüdür denir.

Lineer Denklem Sistemi

Örneğin,

$$\mathbf{4}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \mathbf{3}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{-1}$$
$$\mathbf{3}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \mathbf{9}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{-4}$$

doğrusal sistemi gibi.

$\boldsymbol{x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3}$

gibi değerler her iki eşitliği de sağlıyorsa, s_1, s_2, s_3 kümesi ele alınan lineer eşitlikler sisteminin bir çözümüdür.

Bu örnek için $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = -1$ her iki eşitlikte de yerine konduğunda eşitlikleri sağladığından bir çözüm kümesini oluştururlar.

Lineer Denklem Sistemi

Doğrusal eşitlikler sisteminin çözümünde ortaya çıkacak durumları daha iyi görebilmek için iki bilinmeyenli (x, y),

$$\mathbf{a_1x + b_1y = c_1} \qquad (l_1 \text{ doğrusu})$$

$$\mathbf{a_2x + b_2y = c_2} \qquad (l_2 \text{ doğrusu})$$

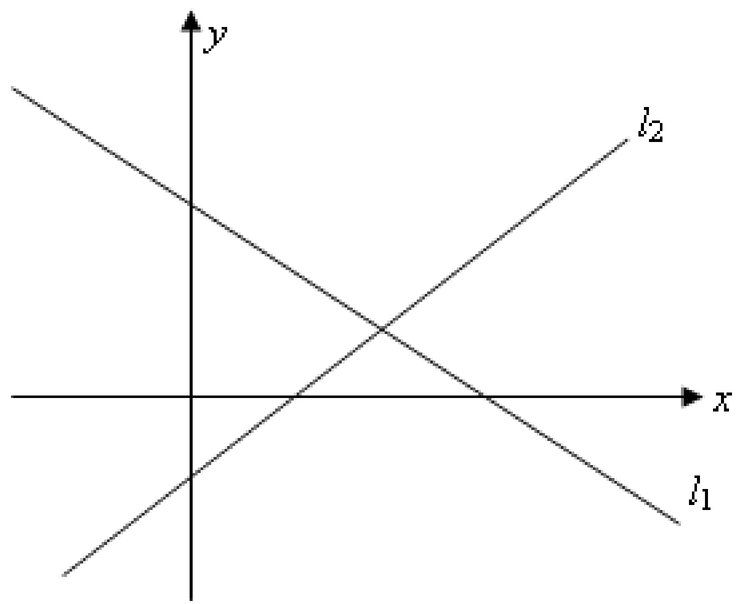
iki doğrusal eşitlik sistemini göz önüne alalım. Burada a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 sabitlerdir. Her iki eşitlikte de x ve y değişkenlerinin katsayıları birlikte sıfır değildir.

Lineer Denklem Sistemi

- Eşitliklerin herbiri *xy* düzleminde bir doğru ile ifade edilmektedir.
- Sistemin çözümü, her iki eşitliği de sağlayan bir değer çifti (*x*, *y*) olduğundan, çözüm iki doğrunun ortak bir noktasına karşı gelmektedir.
- İki bilinmeyenli iki doğrusal eşitlikten oluşan doğrusal sistemimizin çözümüne ilişkin üç durum ortaya çıkmaktadır.

Lineer Denklem Sistemi

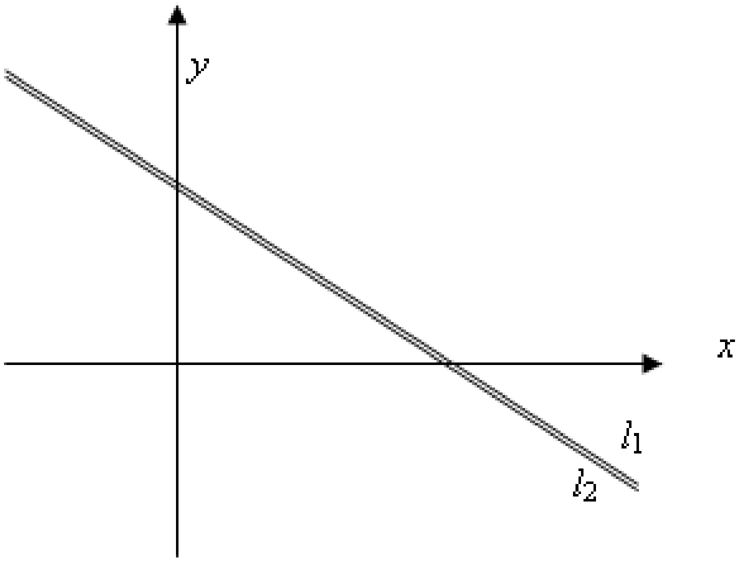
a) l_1 ve l_2 doğruları tek bir noktada kesişir (Şekil-1.1.). Bu durumda tek bir çözüm mevcuttur. Sistem **consistent** denir.



Şekil-1.1.

Lineer Denklem Sistemi

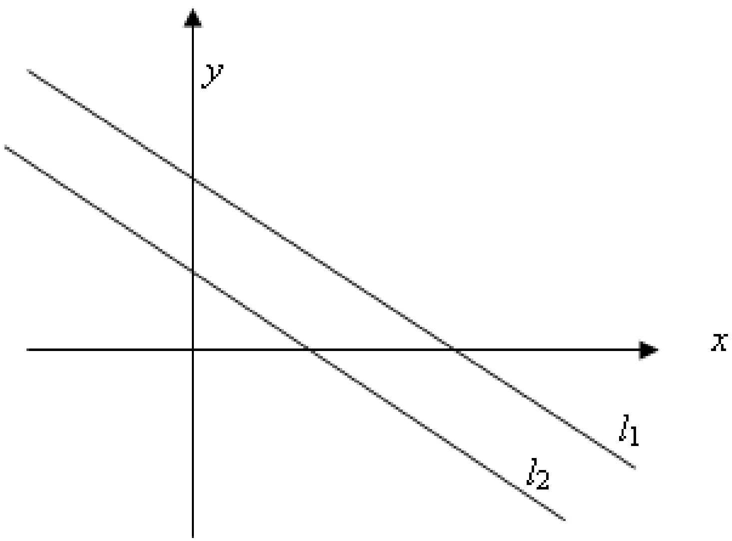
b) l_1 ve l_2 doğruları üst üste çakışmıştır (Şekil-1.2). Bu durumda sonsuz sayıda ortak nokta bulunmaktadır, dolayısıyla sonsuz sayıda çözüm mevcuttur. Bu bir **tutarlı** sistem olup bağımlı sistem olarak bilinir.



Şekil-1.2.

Lineer Denklem Sistemi

c) l_1 ve l_2 paralel doğrulardır. Bu durumda herhangi bir ortak nokta bulunmamakta, dolayısı ile sistemin çözümü mevcut değildir. Sistem **tutarsız** denir.



Şekil-1.3.

Lineer Denklem Sistemi

- Biz sadece iki değişkenli iki doğrusal eşitlikten oluşan bir doğrusal eşitlikler sistemini göz önüne aldık.

- Genelde *m* eşitlik ve *n* bilinmeyenden oluşan sistemler göz önüne alınacaktır. Bu sistemlerin ya sadece bir çözümü, ya sonsuz sayıda çözümü veya hiçbir çözümü mevcut olmayabilir.

Lineer Denklem Sistemi

- *m* doğrusal eşitlik ve *n* bilinmeyenden oluşan bir doğrusal eşitlikler sistemi (Lineer sistem)

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

- Bir lineer eşitlikler sisteminin çözümünün elde edilmesinde kullanılan temel yaklaşım verilen sistemin aynı çözüm kümesine sahip fakat çözülmesi daha kolay yeni bir sistem ile değiştirilmesidir.

Lineer Denklem Sistemi

- Yeni sistem genel olarak aşağıda belirtilen işlemlerin bilinmeyenleri sistematik bir şekilde elimine edecek şekilde uygulanmasıyla elde edilir.

  Bu işlemler,

  1. Bir eşitlik sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılabilir.
  2. İki eşitlik yer değiştirebilir.
  3. Bir sabit ile çarpılan eşitlik diğer eşitliğe eklenebilir.

- **Bu işlemler <u>elementer satır işlemleri</u> olarak bilinir.**

Lineer Denklem Sistemi

- **Örnek:**

  Eliminasyon yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 5y - 7z &= -11 \end{aligned}$$

  lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Lineer Denklem Sistemi

- Sistemin çözümünü elde etmek için aşağıdaki adımları uyguladığımızı varsayalım.

  1. İkinci satıra birinci satırın -2 ile çarpımını ekleyiniz.

$$
\begin{aligned}
x - 2y + 3z &= 4 \\
5y - 5z &= -5 \\
5y - 7z &= -11
\end{aligned}
$$

Lineer Denklem Sistemi

2. İkinci ve üçüncü sıraların yerlerini değiştirelim.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ 5y - 5z &= -5 \end{aligned}$$

Lineer Denklem Sistemi

3. İkinci satırı -1 ile çarpıp üçüncü satıra ekleyelim.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ 2z &= 6 \end{aligned}$$

Lineer Denklem Sistemi

4. Üçüncü sırayı ½ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 5y - 7z &= -11 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Lineer Denklem Sistemi

5. $z = 3$ değerini birinci ve ikinci eşitliklerde yerine koyunuz.

$x - 2y + 9 = 4$ veya $x - 2y = -5$ veya $x - 2y = -5$

$5y - 21 = -11$ $5y = 10$ $y = 2$

Buradan $\mathbf{x - 4 = -5}$

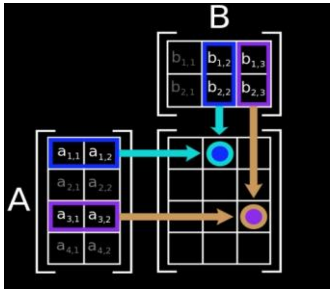
$\mathbf{x = -1}$

elde edilir. Dolayısıyla verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümesi **(-1, 2, 3)**'tür.

Eş (Denk) Sistemler

Tanım: Çözümleri aynı olan sistemlere eş (denk) sistemler denir.

- Daha önce ifade edildiği gibi elementer satır dönüşümleri yardımıyla verilen lineer denklem sistemi her aşamada çözümü daha kolay olan ve aynı çözüm kümesine sahip yeni bir denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Örneğin 1., 2., 3. ve 4. aşamalardaki lineer denklem sistemleri aynı çözüm kümelerine sahip denk sistemlerdir.



Matris: *m* satır ve *n* sütundan oluşan, sayıların bir dikdörtgensel dizisine bir matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin i. satırı $[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ dir .$(1 \leqslant i \leqslant m)$.

A nın j. sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ dir. $(1 \leqslant j \leqslant n)$

Matrisler

- Matristeki her bir sayıya **eleman (girdi)** denir. Yukarıdaki matriste $m \times n$ tane eleman vardır.

- Matrisin yatay bir doğru boyunca sıralanan elemanlarına satır elemanları, dikey bir doğru boyunca sıralanan elemanlarına sütun elemanları denir. Yukarıdaki matris m sıra ve n sütundan oluşmaktadır.

Matrisler

- Matristeki bir elemanın yerini belirlemede iki indis kullanılır. Bunlardan biri elemanın hangi satırda, diğeri de hangi sütunda olduğunu belirtir.

- Örneğin a_{ij} elemanı, elemanın ***i'***inci sıra ve ***j'***inci sütunda olduğunu belirtir. Benzer şekilde a_{23} elemanı ikinci satır ve üçüncü sütundadır.

- Matris genelde $[a_{ij}]$ şeklinde ifade edilir.
- m satır ve n sütundan oluşan bir matrise $m \times n$ matris denir.

- Eğer matrisin satır ve sütun sayıları birbirine eşit ise, örneğin $m=n$ ise, matrise kare matris adı verilir.

Matrisler

- **Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = [1 \;\; 3 \;\; -7], C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ise $a_{32} = -3, c_{21} = -1, b_{12} = 3, d_{22} = -2 \ldots$ gibi.

Matrisler

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Örneğin, yandaki matriste satır ve sütun sayıları ***m* = *n* = 3** olduğundan bu bir kare matrisidir. $\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{a_{22}} = \mathbf{4}$, $\boldsymbol{a_{33}} = \mathbf{-3}$ elemanlarına matrisin **asal (esas) köşegeni** denir.

Matrisler

- **Satır matris:** Bir satırdan oluşan matrise satır matrisi denir.

- Örneğin ***A* = [1, 7, -2, 3]** satır matristir. Bir satır ve dört sütundan oluşmuştur. **1×4** matristir.

- **Sütun matris:** Bir sütundan oluşan bir matrise sütun matris denir.

  Örneğin $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisi sütun matristir. Üç satır ve bir sütundan oluşmuştur. **3×1** matristir.

Matrisler

- **Örnek:**

Aşağıdaki matrisleri boyutlarına göre sınıflayınız.

$$\text{a)}\quad A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A**, 2×3** matristir, 2 satır ve 3 sütundan oluşmuştur.

$$\text{b)}\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

B**, 2×2** kare matristir, satır veya sütun sayısı 2'dir.

Matrisler

c) $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ***C*, 3×1** matristir. 3 satır ve 1 sütundan oluşmuştur. Bir sütun matris veya bir vektördür.

d) $D = [-3, 2, 8]$

***D*, 1×3** matristir. 1 satır ve 3 sütundan oluşan bir satır matristir.

e) $E = [3]$

***E*, 1×1** kare matristir. **Tek elemanlı matris** olarak da bilinir.

İki Matrisin Eşitliği

Tanım Eğer $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşitse bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ yazılır . Yani her $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ dir.

- **Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

matrislerinin boyutları (***A***, **2×2** ve ***B***, **2×2**) ve karşılıklı elemanları eşit olduğundan iki matris eşittir denir.

İki Matrisin Eşitliği

- **Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada ***A*** **2×2** ve ***B*** **2×3** matrisler olduğundan, boyutları birbirine eşit olmadığından $A \neq B$'dir.

- **Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

A ve *B*'nin boyutları aynı olmasına karşın, elemanları farklı değerler olduğundan $A \neq B$'dir.

Matrisin Toplamı

- **İki Matrisin Toplamı:** *A* ve *B* boyutları aynı olan iki matris olsun. *A+B* toplamı, matrislerin karşılıklı elemanlarının toplamı olarak oluşan bir matristir ve *C=A+B* şeklinde ifade edilir. Yani,

Eğer $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ tipinde matrislerse A ve B nin toplamı olan $C = [c_{ij}] = A + B$ matrisi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ şeklinde tanımlanır.

Matrisin Toplamı

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & -3 \\ 5 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+4 & 5+6 \\ 4+3 & 6+5 & -3+7 \\ 5+2 & 4+1 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 7 & 11 & 4 \\ 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

dır. Görüldüğü gibi A 3×3 ve B 3×3 boyutlu matrisler olup karşılıklı elemanları toplanmış ve aynı boyutlu bir C 3×3 matrisinin aynı pozisyondaki elemanlarını oluşturmuştur.

Matrisin Toplamı

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- *A* 2×2, *B* 2×3 matrislerdir. Boyutları farklı olduğundan *A+B* toplamı *mümkün değildir.*

Matrislerin Farkı

- İki matrisin birbirinden çıkarılması için toplama özelliklerinin olması gerekir. Gerçekte iki matrisin birbirinden çıkarılması demek, bu matrislerden birinin (-1) ile çarpılıp diğeriyle toplanması demektir.

- İki matrisin birbirinden çıkarılmasında da matrislerin karşılıklı elemanları çıkarılır.

$$\boxed{A - B = A + (-1)\,B}$$

Matrislerin Farkı

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

ise C = A – B

$$= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 & 7-1 \\ 8-2 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Matrisin bir sayı (skalar) ile çarpımı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. *A* matrisinin *k* ile belirtilen bir sayı (skalar) ile çarpımı olan *kA* matrisi, *A*'nın her elemanının *Ak* ile çarpılmasıyla elde edilir.

Matrisin bir sayı (skalar) ile çarpımı

Örnek:

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$ çarpımını elde ediniz.

$$3\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Matrisin bir sayı (skalar) ile çarpımı

Örnek:

$$-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ çarpımını elde ediniz.

$$-5\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 10 \\ -20 & -25 & -15 \\ 15 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisler

Matris toplamının ve skaler çarpımının özellikleri

A, B ve C $m \times n$ boyutlu matrisler a ve b reel sayılar ise, aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $a(A + B) = aA + aB$

d) $(a + b) A = aA + bA$

e) $a(bA) = (ab)A$

f) ***Eğer m0n tüm elemanları sıfır olan $m \times n$ boyutlu bir matris ise $A + 0 = 0 + A$'dır.***

İki Matrisin Çarpımı

İki Matrisin Çarpımı

- Eğer $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ ve $B=[b_{ij}]$ $n \times p$ boyutlu matrisler ise A ve B'nin çarpımı $AB = C = [c_{ij}]$ $m \times p$ boyutlu bir matristir. Burada çarpımın gerçekleşebilmesi için A matrisinin sütun sayısı (n) ile B matrisinin satır sayısı (n)'nın aynı olması gerekir.

- Örneğin A matrisi 4×3 ve B matrisi 3×5 boyutlu matrisler ise $A \cdot B$ mümkündür ve $AB = C$ matrisi 4×5 boyutlu bir matristir.

İki Matrisin Çarpımı

Eğer A matrisi 4×3 ve B matrisi 2×5 boyutlu ise A matrisinin sütun sayısı (n=3) ile B matrisinin satır sayısı (n=2) aynı olmadığından matrislerin çarpım işlemi gerçekleşmez.

$A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrislerinin çarpımı sonucunda (AB) oluşan $C=[c_{ij}]$ matrisinin elemanları,

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir.

İki Matrisin Çarpımı

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1j} \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2j} \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nj} \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} = C$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$$

İki Matrisin Çarpımı

- Çarpım işleminin nasıl gerçekleştiğini anlayabilmek için ilgili matris çarpımını şekildeki gibi yazarsak A matrisinin i'inci sıra elemanları ile B matrisinin j'inci sütun elemanlarının çarpımlarının toplamı bize C matrisinin c_{ij}'inci elemanını verecektir.
- C matrisinin diğer elemanları da benzer şekilde A matrisinin ilgili satır elemanları ile B matrisinin ilgili sütun elemanlarının çarpımının toplamı şeklinde elde edilir.

İki Matrisin Çarpımı

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilmiş olsun. *A,* 2×3 ve *B,* 3×4 matris olduğundan *AB = C* çarpımı mümkündür. *C* matrisinin boyutu 2×4'tür.

İki Matrisin Çarpımı

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 2 \quad 6 \quad 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

çarpımı sonucunda elde edilen *C* matrisinin elemanlarını elde etmek için, *A* matrisinin 1. sırası ile *B* matrisinin 1. sütun elemanları çarpımının toplamı bize *C* matrisinin c_{11} elemanını verir.

İki Matrisin Çarpımı

Bu durum aşağıda gösterilmiştir. Örneğin c_{11} elemanı,

$$c_{11} = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 0) + (4 \cdot 2) = 12$$

şeklinde elde edilir. c_{12} elemanını elde etmek için *A* matrisinin 1. satır elemanları ile *B* matrisinin 2. sütun elemanlarının çarpımlarının toplamı gerekir.

İki Matrisin Çarpımı

Bu durum

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 2 \quad 6 \quad 0 \end{bmatrix}} \quad \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

matris çarpımı gözönüne alındığında

$\boldsymbol{c_{12} = (1 \cdot 1) + (2 \cdot (-1)) + (4 \cdot 7) = 27}$

olarak elde edilir.

İki Matrisin Çarpımı

- Benzer şekilde, *C* matrisinin ikinci satır elemanlarını elde etmek için *A* matrisinin 2. satır elemanları sırasıyla *B* matrisinin 1. sütun, 2. sütun ve diğer sütun elemanları ile ayrı ayrı çarpılarak toplamlarının elde edilmesi ile bulunur.

- Örneğin $\boldsymbol{c_{23}}$ elemanı elde etmek için *A* matrisinin 2. satırı ile *B* matrisinin 3. sütun elemanları çarpımının toplamı elde edilir.

İki Matrisin Çarpımı

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{2 \quad 6 \quad 0} \end{bmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}}$$

$c_{23} = (2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$

Tüm satır sütun elemanları çarpım toplamı gerçekleştiğinde

AB çarpımı sonucu

$$AB = C = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

İki Matrisin Çarpımı

Örnek $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ matrisleri verilsin.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2\cdot 4 + (-1)2 & 1\cdot 5 + 2(-3) + (-1)1 \\ 3(-2) + 1\cdot 4 + 4\cdot 2 & 3\cdot 5 + 1(-3) + 4\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Burada $B \cdot A$ matrisi de tanımlıdır. (Her zaman tanımlı olmayabilir.)

Matris Çarpımının Özellikleri

Matris Çarpımının Özellikleri

A, *B* ve *C* matrislerinin boyutlarının çarpma işlemlerinin gerçekleşeceği şekilde olduğu varsayılmaktadır.

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B + C) = AB + AC$

c) $(A + B)C = AC + BC$

d) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$

e) Genel olarak, $AB \neq BA$

Özel Matrisler

Özel Matrisler

Sıfır Matris: Tüm elemanları sıfır olan matristir. Eğer ele alınan sıfır matris $m \times n$ boyutlu ise $\mathbf{0}_{mn}$ şeklinde yazılmalıdır.

Transpoze Matris: Bir matrisin transpozesini elde etmek için matrisin satır ve sütunları yer değiştirir. Eğer matrisimiz A ise transpozesi A^T'dir.

Özel Matrisler

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin transpozesini elde ediniz.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi A matrisinin

1. satır elemanları A^T matrisinin

1. sütun elemanları,

A matrisinin 2. sütün elemanları

A^T matrisinin 2. sütun elemanları

olarak yer değiştirmiştir.

Özellikler:

Transpoz İşleminin Özellikleri

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$ $\quad k$ bir skaler
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Özel Matrisler

Kare Matris: Satırlarının sayısı sütunlarının sayısına eşit olan matrise **kare matris** denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır ve sütun sayıları $m=n=3$ olduğundan bir kare matristir.

Özel Matrisler

Asal (Esas) Köşegen:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

kare matrisini gözönüne alalım.

Burada a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} elemanlarına **asal (esas) köşegen** elemanları denir.

Özel Matrisler

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

kare matrisinde $a_{11} = 1$, $a_{22} = 5$ ve $a_{33} = 9$ elemanları asal köşegen elemanlarıdır.

Özel Matrisler

Köşegen Matris: *Asal köşegen dışında kalan elemanları sıfır olan kare matrise köşegen matris denir.*

Örnek: 1.19.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

kare matrisinin asal köşegen dışında kalan elemanları sıfır olduğundan köşegen matristir.

Özel Matrisler

Skalar Matris: Asal köşegen elemanları birbirine eşit olan köşegen matrise **skalar matris** denir.

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

köşegen matrisinin asal köşegen elemanları $a_n = 3$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 3$ aynı değere (3) eşit olduğundan **skalar matristir**.

Özel Matrisler

- **Birim Matris:** Köşegen bir matriste asal köşegen elemanları 1'e eşitse bu matrise **birim matris** denir.

- Eğer matris $n \times n$ boyutlu ile bu I_n ile gösterilir.

Örnek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi bir birim matris olup I_3 olarak gösterilir.

Özel Matrisler

Üç Köşegenli (Band) Matris: Bir kare matrisin asal köşegeni ve ona bitişik köşegenlerdeki elemanları hariç diğer elemanları sıfır ise bu matrise **Üç Köşegenli (band) Matris** (tridiogonal) adı verilir. Bu köşegenlerin bazı elemanları (tümü değil), sıfır değeri olabilir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi **üç köşegenli (band)** bir matristir.

Özel Matrisler

Üst Üçgen Matris: Bir kare matrisin asal köşegeninin altında kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **üst üçgen matris** denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

matrisi, asal köşegenin altında kalan elemanları sıfır olduğundan **üst üçgen matris**'tir.

Özel Matrisler

Alt Üçgen Matris: Bir kare matrisin asal köşegeninin üstünde kalan tüm elemanları sıfır ise bu matrise **alt üçgen matris** denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi,asal köşegen üstünde kalan elemanları sıfır olduğundan **alt üçgen matris**’tir.

Özel Matrisler

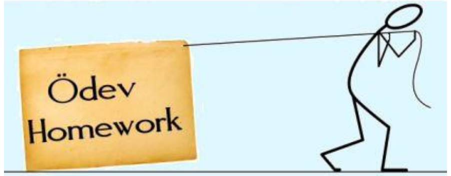
Simetrik Matris: Bir kare matriste $A^T=A$ ise matris **simetrik matris**'tir denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ matrisinin transpozesi alındığında $$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & -3 & 6 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$A^T=A$ olduğundan A matrisi **simetrik matris**'tir denir.

Örneklerden de görüldüğü gibi asal köşegene göre simetrik elemanlar birbirine eşittir.



$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3&-1&3\\4&1&5\\2&1&3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3&-2\\2&5\end{bmatrix} \text{ ve } E=\begin{bmatrix}2&-4&5\\0&1&4\\3&2&1\end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. (Eğer mümkünse) aşağıdaki işlemleri yapınız:

$a)\ C+E$ $\qquad b)\ AB$

$c)\ 2C-3E$ $\qquad d)\ CB+D$

$e)\ AB+D^2$ $\qquad f)\ (3)(2A)$

$g)\ A(BD)$ $\qquad h)\ (AB)D$

$i)\ A(C+E)$ $\qquad j)\ AC+AE$

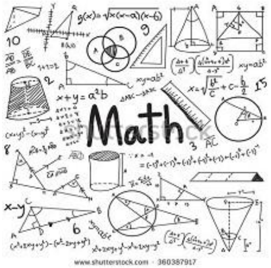
$k)\ 2A+3A$ $\qquad l)\ A^T$

$m)\ \left(A^T\right)^T$ $\qquad n)\ (AB)^T$

$o)\ B^T A^T$ $\qquad p)\ (C+E)^T$

$r)\ C^T+E^T$

Bölüm 2: Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü



Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Notasyonu Gösterimi

m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Daha önce de belirtildiği gibi x_1, x_2, ..., x_n bilinmeyenleri, a'lar ve b'ler ise sabitleri ifade etmektedir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Lineer denklem sistemi matrisler ile

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

bilinmeyenler Sütun matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sabitler Sütun matrisi,

olmak üzere

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

2.1.1. Arttırılmış (Augmented) Matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} = [A \vdots B]$$

matrisine *arttırılmış (ilaveli) matris* denir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi verilmektedir.

a) Sisteme ilişkin katsayılar matrisini elde ediniz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

b) Arttırılmış matrisi elde ediniz.

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

c) Sistemi matris notasyonu yardımıyla ifade ediniz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini matrisler yardımıyla ifade ediniz.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen lineer denklem sistemi matris gösterimi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 22 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

şeklinde ifade edilir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad &= \ 6 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini matris notasyonu şeklinde ifade ediniz.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Verilen sistem matris gösterimi yardımıyla

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}}_{B}$$

şeklinde ifade edilir. Verilen lineer denklem sistemine ilişkin arttırılmış matris $[A \vdots B]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & \vdots & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$ olarak ifade edilebilir.

Elementer Satır İşlemleri

Elementer Satır İşlemleri Tanımı

Bir A matrisindeki elementer satır işlemleri aşağıdaki işlemlerden biri olarak tanımlanmaktadır.

A) A matrisinin herhangi bir satırının (örneğin i'nci satırı) sıfırdan farklı bir sabit (k) ile çarpımı. R_i , i'inci satırı belirtiyorsa bu satırın k sabiti ile çarpımı sonucu i'inci satır $R_i \rightarrow k\, R_i$ şeklinde olacaktır.

B) A matrisinin herhangi iki satırının, örneğin i'inci ve j'inci satırlarının yerlerinin değiştirilmesi. Bu durum $R_i \leftrightarrow R_j$ şeklinde gösterilebilir.

C) A matrisinin herhangi bir satırının sıfırdan farklı bir k sabiti ile çarpılıp (örneğin j'inci satırının R_j) i'inci satırına (R_i) eklenmesi. Bu durum $R_i \rightarrow R_i + k\, R_j$ şeklinde gösterilir.

Notasyon

Symbol	Tanım
kR_i (kr_i)	Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
$R_i \leftrightarrow R_j$ $(r_i \leftrightarrow r_j)$	İki satırın yerlerini değiştirme
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$ $(r_i + kr_j \rightarrow r_i)$	Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

Elementer sıra işlemleri yardımıyla aşağıda verilen lineer denklem sistemini satır eşdeğer denklem sistemleri halinde ifade ediniz.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Lineer denklem sistemine ilişkin

<u>Arttırılmış matris</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>Lineer Denklem Sistemi</u>

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris kullanılarak Çözümü

Burada A matrisinin 2.satırı 2 sabiti ile çarpılmaktadır ($R_2 \to 2\ R_2$). Oluşan lineer denklem sistemi ile verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümeleri aynıdır.

Benzer şekilde eğer A matrisinin herhangi iki satırı örneğin 1. satır ile 2. satırı yer değiştirecek olursa ($R_1 \leftrightarrow R_2$) yeni arttırılmış matris ve lineer denklem sistemimiz

$$A \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Eğer 2.satırı –3 ile çarpar 3.satıra eklersek ($R_3 \to R_3 - 3R_2$) bu işlemler sonucu verilen arttırılmış matrisimiz ve lineer denklem sistemi

$$A \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 11 & -10 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ -5x_2 + 11x_3 &= -10 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Matrislere ilişkin elementer satır dönüşümleri (işlemleri) yapıldığında her defasında A matrisinin başından başlama zorunluluğu yoktur.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin elementer satır dönüşümleri yardımıyla eşdeğer sistemlerini oluşturalım.
Verilen sisteme ilişkin arttırılmış matris ve denklem sistemini aşağıda belirtildiği şekilde yazalım.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

<u>Arttırılmış Sistem</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 25 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

<u>Lineer Denklem Sistemi</u>

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ - x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 5x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Yukarıda önce $R_1 \rightarrow R_1 + R_3$ daha sonra $R_3 \rightarrow -R_3$ elementer satır işlemleri bir önceki matris üzerine gerçekleştirilmiştir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 - 6x_3 &= -10 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= 14 \\ x_2 - x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - \quad x_3 &= 3 \\ 5x_3 &= 13 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_3 \to \frac{R_3}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{28}{5} \\ x_3 &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnekten de görüldüğü gibi her aşamada elde edilen matrisler (dolayısıyla lineer denklem sistemi) birbirine satır eşdeğer olup sistemin aynı çözüm kümesine sahiptirler.

Örneğin verilen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 22 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 18 \end{aligned}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

sisteminin çözüm kümesi ile, son aşamada elde edilen,

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = \frac{28}{5}$$
$$x_3 = \frac{13}{5}$$

denklem sisteminin çözüm kümesi aynı olup

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{28}{5},\ x_3 = \frac{13}{5} \text{ yani } \left(1, \frac{28}{5}, \frac{13}{5}\right)\text{'tir.}$$

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Bir matrisin satır eşdeğer matris şeklinde ifade edilmesi

Bir matris eğer aşağıda belirtilen kurallar sağlanırsa satır eşdeğer matris (Row echelon form) şeklindedir denir.

a) Sadece sıfırlardan oluşan satırlar mevcutsa bunlar matrisin en altındadır.

b) Sıfırlardan oluşan satırlardan farklı satırlarda ilk sıfırdan farklı eleman değeri 1'dir.

c) Her bir satırdaki ilk sıfırdan farklı 1 değeri, bir önceki satırdaki sıfırdan farklı ilk 1 elemanının sağında yer alır.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin satır eşdeğer matris şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

Görüldüğü gibi 1.sıranın ilk sıfırdan farklı elemanı 1'dir.
İkinci satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup bu birinci satırda yer alan 1 elemanının sağındadır.
Üçüncü satırın ilk sıfırdan farklı elemanı 1 olup, bu ikinci sıradaki 1'in sağında yer almaktadır.
Bu şartlar verilen matrisin satır eşdeğer matris şeklinde olduğunu göstermektedir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır eşdeğer matris şeklinde olup olmadığını ifade ediniz.

1. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'dir.
2. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 olup, bu değer bir önceki satırdaki 1 elemanının sağında yer almaktadır.
3. satırın tüm elemanları sıfır olup matrisin en alt satırını oluşturmaktadır.

Dolayısıyla verilen matris satır eşdeğer matris şeklinde ifade edilmiştir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde 2. satır elemanlarının tümü sıfır olduğundan ve bu satır matrisin son satırı olarak yer almadığından verilen matris satır eşdeğer matris olarak ifade *edilmemiştir.*

Daha önce belirtilen üç kurala ek olarak eğer bir satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır ise, verilen matris satır indirgenmiş eşdeğer matris (row reduced echelon) şeklindedir denir.

Satır indirgenmiş eşdeğer matris
(row reduced echelon matrices)

Bir matris eğer aşağıda belirtilen kurallar sağlanırsa satır indirgenmiş eşdeğer matris (Row Reduced Echelon form) şeklindedir denir.

a) Sadece sıfırlardan oluşan satırlar mevcutsa bunlar matrisin en altındadır.

b) Sıfırlardan oluşan satırlardan farklı satırlarda ilk sıfırdan farklı eleman değeri 1'dir.

c) Her bir satırdaki ilk sıfırdan farklı 1 değeri, bir önceki satırdaki sıfırdan farklı ilk 1 elemanının sağında yer alır.

d) Bu üç kurala ek olarak eğer bir satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır ise, verilen matris satır indirgenmiş eşdeğer matris (row reduced echelon) şeklindedir denir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır indirgenmiş matris şeklinde olup olmadığını kontrol ediniz.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

- 1. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu elemanın bulunduğu 1. sütundaki diğer elemanlar sıfırdır.

- 2. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu eleman bir önceki satırdaki 1'in sağında yer almakta ve sütunundaki diğer elemanlar sıfırdır.

- 3. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 ve bu 2. satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1'in sağında yer almakta ve ilgili sütunun diğer elemanları sıfırdır.

- Bu durumda verilen matris satır indirgenmiş matris şeklindedir denir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinde, 2.satırdaki ilk sıfırdan farklı eleman 1 fakat bu elemanın bulunduğu sütundaki diğer elemanlar sıfır olmadığından (burada -2 bulunmaktadır) ilgili matris satır indirgenmiş matris şeklinde değildir denir.
Elementer satır dönüşümleri yardımıyla verilen bir matris satır indirgenmiş matris şekle dönüştürülebilir.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini elementer satır dönüşümleri yardımıyla satır indirgenmiş matris şekle dönüştürünüz.

Lineer Sistemlerin Matris Kullanılarak Çözümü

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2} R_3]{R_2 \to \frac{1}{5} R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi verilen matris satır indirgenmiş matris şekle dönüştürülmüştür.

Gauss ve Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemleri

Gauss ve Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemleri

- Lineer denklem sistemlerinin çözümünü elde etmede kullanılan birçok yöntem vardır.
- İzleyen kısımlarda bu yöntemlerden ikisi olan Gauss ve Gauss-Jordan yöntemleri tanıtılacaktır.
- Burada $n \times n$ boyutlu lineer denklem sistemleri ele alınacaktır.
- Daha sonraki bölümlerde $m \times n$ boyutlu lineer denklem sistemlerinin çözümlerinden bahsedilecektir.

Gauss Yöntemi

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \dots & + a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

şeklinde verilen bir lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A'nın

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

Gauss Yöntemi

ve arttırılmış matrisin $[A \vdots B]$ 'nin

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlandığı önceki bölümde ele alınmıştı.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

Elementer satır dönüşümleri yardımıyla arttırılmış matris $[A\vdots B]$ 'nin A katsayılar kısmı asal köşegen elemanlar 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüştürülürse $[A\vdots B]$ matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \vdots & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{bmatrix}$$

şeklini alır.

Verilen $[A\vdots B]$ katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yukarıda belirtilen eşdeğer bir $[A^*\vdots B^*]$ matrisine dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

Örnek:

Gauss Eliminasyon yöntemini kullanarak

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\
3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1 \\
-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

Sisteme ilişkin arttırılmış matrise elementer satır dönüşümleri uygulanırsa $[A \vdots B]$ matrisinin *A* katsayılar kısmı,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Gauss Eliminasyon Yöntemi

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5} R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 7R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{49}{5} & -\frac{14}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{5}{49} R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

asal köşegen elemanları 1 olan bir üst üçgen matris haline dönüşür.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

$[A \vdots B]$ matrisinin satır dönüşümleri ile elde edilen eşdeğer matrisi gözönüne alınırsa,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - \quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \frac{7}{5}x_3 &= -\frac{7}{5} \\ x_3 &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi haline dönüştürülür.

Gauss Eliminasyon Yöntemi

x_3 değeri, ikinci eşitlikte yerine konursa,

$$x_2 + \frac{7}{5}\left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{7}{5}$$

elde edilir.

$$x_2 = -1$$

$x_2 = -1$ ve $x_3 = -\frac{2}{7}$ değerleri birinci eşitlikte yerine konursa,

$x_1 - 2\,(-1) - (-\frac{2}{7}) = 2$ eşitliğinden, $x_1 = -\frac{2}{7}$ elde edilir.

Dolayısıyla verilen lineer denklem sisteminin çözüm kümesi

$(-\frac{2}{7},\ -1,\ -\frac{2}{7})$ olarak bulunur.

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

$$[A \vdots B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisinin, elementer satır dönüşümleri yardımıyla, asal köşegen elemanları 1 olan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^* \\ 0 & 0 & 1\dots & 0 & b_3^* \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{bmatrix}$$

matrise dönüştürüldüğünü varsayalım.

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Verilen $[A \vdots B]$ katsayılar matrisinin elementer satır dönüşümleri yardımıyla yukarıda verilen eşdeğer bir matrise dönüştürülerek lineer denklem sisteminin çözümünün elde edilmesi işlemi **Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi** olarak bilinmektedir.

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Örnek:

Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi yardımıyla

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü elde ediniz.

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Sisteme ilişkin arttırılmış matris

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

dir. Bu matrise elementer satır dönüşümleri uygulanırsa,

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir.

Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi

Elde edilen bu eşdeğer matris yardımıyla

$$
\begin{aligned}
1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 &= 2 \\
0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 &= 2 \\
0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla çözüm kümesi (2, 2, 0)'dır.

Bir Matrisin Tersi

Matris tersinin tanımı

A ve *B* $n\times n$ boyutlu matrisler olsun. *A* ve *B* matrisleri

$AB = BA = I_n$ bağıntısını sağlıyorsa *B*'ye *A*'nın tersi denir

ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir. *A* da *B*'nin tersidir ve $A = B^{-1}$ yazılır.

Her $n\times n$ boyutlu bir kare matrisin tersinin mevcut olması *gerekmez.*

Bir Matrisin Tersi

Örnek:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrislerinin birbirinin tersi olduğunu gösteriniz.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Bir Matrisin Tersi

$$\overset{B}{\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$ yani $AB = BA = I_2$ olduğundan

$B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisinin tersidir.

Bu durum $B = A^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Bir Matrisin Tersi

Benzer şekilde

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ matrisi $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi

olup $A = B^{-1}$ şeklinde gösterilir.

Bir Matrisin Tersi

Bir kare matrisin örneğin $n \times n$ boyutlu A matrisinin

tersi A^{-1} matrisini elde etmek için $[A \vdots I]$ matrisi elementer

satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots B]$ matrisi haline

dönüştürülür. Burada $B = A^{-1}$ 'dir.

Bir Matrisin Tersi

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini $[A \vdots I] \rightarrow [I \vdots A^{-1}]$ yöntemini kullanarak elde ediniz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Bir Matrisin Tersi

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{R_3}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Bir Matrisin Tersi

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Görüldüğü gibi $[A \vdots I]$ matrisi elementer satır dönüşümleri yardımıyla $[I \vdots A^{-1}]$ matrisine dönüştürülmüştür.

Bir Matrisin Tersi

Bu işlemler sonucunda *A* matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{7}{4} & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{5}{4} \\ -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Ters Matrislerin Özellikleri

Ters Matrislerin Özellikleri

Özellik 1. Her ne kadar genelde matris çarpımı komütatif değilse de (yani $AB \neq BA$), eğer $B=A^{-1}$ ise, $AA^{-1} = A^{-1}A$ 'dır.

Özellik 2. Bir matrisin tersi mevcut ise, bu bir tanedir.

Özellik 3. *A* ve *B* aynı boyutlu tersi alınabilir matrislerse, (*AB*)'nin tersi elde edilebilir ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 'dir.

Ters Matrislerin Özellikleri

Özellik 4. Eğer A tersi alınabilir bir matris ise aşağıdaki özellikler geçerlidir.

i) A^{-1} tersi alınabilir bir matristir ve $(A^{-1})^{-1} = A$'dır.
ii) A^{T} tersi alınabilir bir matristir ve $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$'dir.
iii) A^{k} tersi alınabilirdir (k = 1, 2, 3, ...) ve $(A^{k})^{-1} = (A^{-1})^{k}$ 'dir.
iv) Sıfırdan farklı bir s skaleri için *sA* tersi alınabilirdir ve

$$(sA)^{-1} = \left(\frac{1}{s}\right)A^{-1}$$ 'dir.