

# MATRISLER



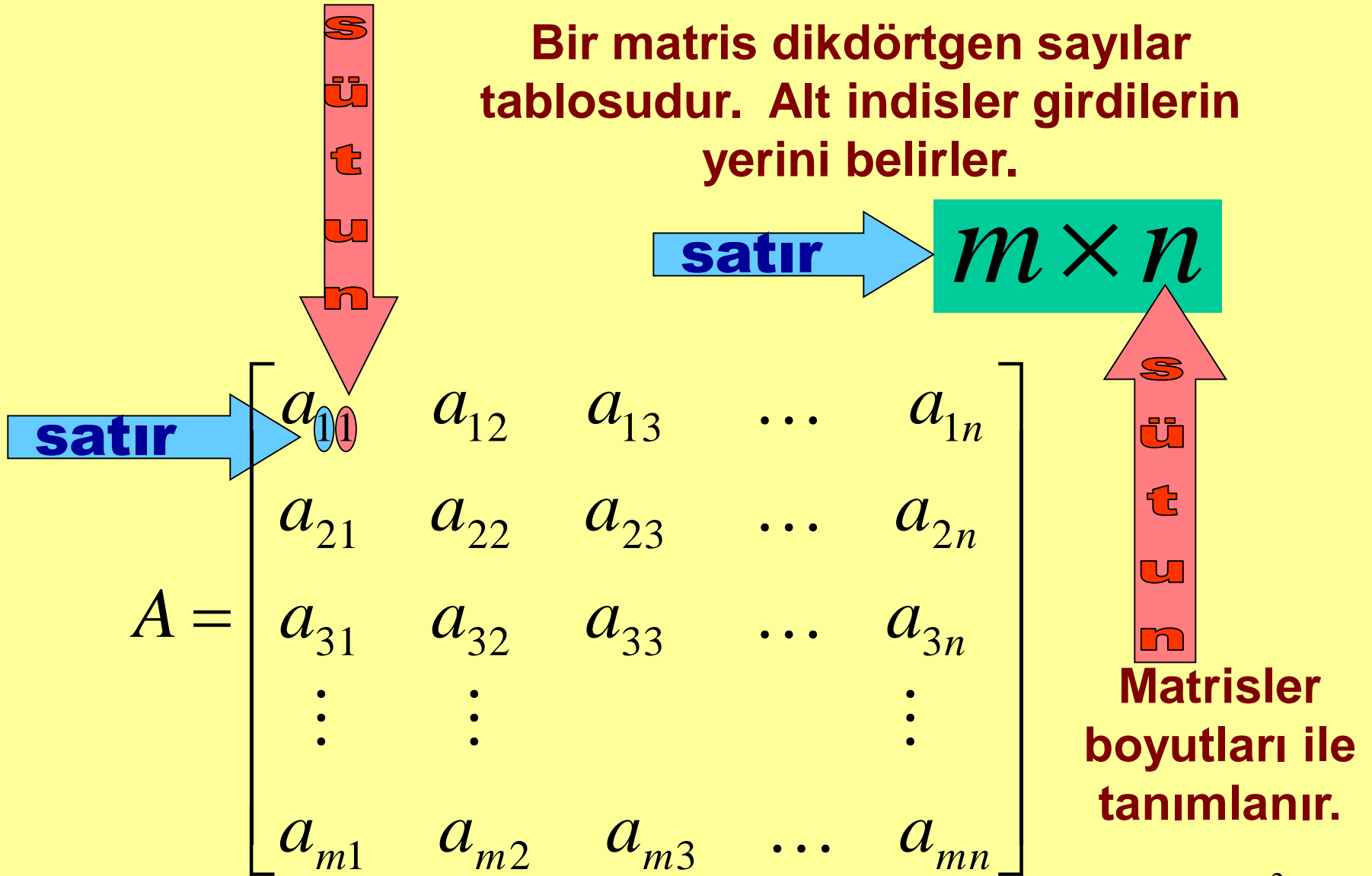
# **Matrisler**

## **Elementer Satır İşlemleri**

## **Gauss Eliminasyon**

# Matrisler ve Satır İşlemleri

Bir matris dikdörtgen sayılar tablosudur. Alt indisler girdilerin yerini belirler.



$1 \times 5$

$$[3 \quad -1 \quad 5 \quad 0 \quad 2]$$

$4 \times 1$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$4 \times 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 5 & -8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Satır ve sütun sayıları aynı olan matrislere kare matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Esas Köşegen

$$3x - 2y + 5z = 3$$

$$-2x + y + 4z = -2$$

$$x + 4y - 7z = 1$$

Katsayı Matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}3x - 2y + 5z &= 3 \\ -2x + y + 4z &= -2 \\ x + 4y - 7z &= 1\end{aligned}$$

**Katsayı matrisine sistemin sağ tarafındaki sabitlerin eklenmesi ile elde edilen matrise ilaveli (arttırılmış) matris denir.**

**İlaveli Matris**

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right]$$

# Elementer Satır İşlemleri

1. İki satırın yerlerini değiştirme
2. Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
3. Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme

# Notasyon

Symbol	Tanım
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$	Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme
$kR_i$	Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
$R_i \leftrightarrow R_j$	iki satırın yerlerini değiştirme



# Satırca Eşelon Form

Elementer satır işlemleri kullanarak, ilaveli matrisi aşağıdaki gibi bir matris formuna getirebiliriz. # işareti sadece sayıları ifade etmektedir --- Ne olduğunun bir önemi yoktur.

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

**"Amaç"**

Matrisi, yukardaki forma getirdikten sonra, değişkenleri yerine yazarak, ve geriye yerine koyma metodu ile sistem çözülür.

Satır işlemlerini kullanarak eşelon formu elde etme:

Zaten 1  $\rightarrow$  
$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

ilaveli matris

$$x + 2y + z = 1$$

$$3x + 5y + z = 3$$

$$2x + 6y + 7z = 1$$

Satır 1 ' i alıp, sıfır elde etmek için, -3 ile çarpıp ikinci satır ile toplayacağız. Bunun için notasyon:  $-3r_1 + r_2 \rightarrow r_2$

" Amaç "

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{array} \right]$$

$$-3r_1 + r_2 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right]$$

$$-2r_1 + r_3 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right]$$

**Birinci sütun için amaca ulaşılmıştır.**

$$\begin{array}{cccc} -3r_1 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ +r_2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ \hline & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -2r_1 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ +r_3 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ \hline & 0 & 2 & 5 & -1 \end{array}$$

**Şimdi, 1.satır 'ı -2 ile çarpıp 3. satıra eklenirse, sıfır elde edilmiş olur.**

$$-r_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

İkinci satırda 1 'e ihtiyacımız olduğundan, -1 ile çarpılır.

$$\begin{array}{r} -2r_2 \\ +r_3 \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Şimdi ikinci sütuna ilerleyerek yukarıda belirtilen amaç matrisini bulacağız.

1 li satır 2 yi kullanarak, 1 in altını sıfır (0) yapmak için, ikinci satırı -2 ile çarpıp 3. satır ile toplayalım.

Şimdi ikinci sütun, amaçlandığı gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{x column} \\
 \text{y column} \\
 \text{z column}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1
 \end{bmatrix}$$

= işareti

$$x = -2$$

$$x + 2(2) + (-1) = 1$$

$$y + 2(-1) = 0$$

$$y = 2$$

$$z = -1$$

*İkinci denklemde  $z = -1$  yazılarak,  $y$  bulunur.*

*Birinci denklemde  $y = 1$  ve  $z = -1$  yazılarak,  $x$  bulunur.*

Solution is:  $(-2, 2, -1)$

**3. Sütun istediğimiz formda olduğundan, elementer satır işlemlerini durdurup, geriye yerine koyma metodu ile çözüme geçilir.**

$$\begin{bmatrix}
 1 & \# & \# & \# \\
 0 & 1 & \# & \# \\
 0 & 0 & 1 & \#
 \end{bmatrix}_{13}$$

$$x + 2y + z = 1$$

$$3x + 5y + z = 3$$

$$2x + 6y + 7z = 1$$

Solution is:  $(-2, 2, -1)$

**Sistemin tek çözümü budur.  
Sonucu doğrulamak için  
sistemde yerine yazalım.**

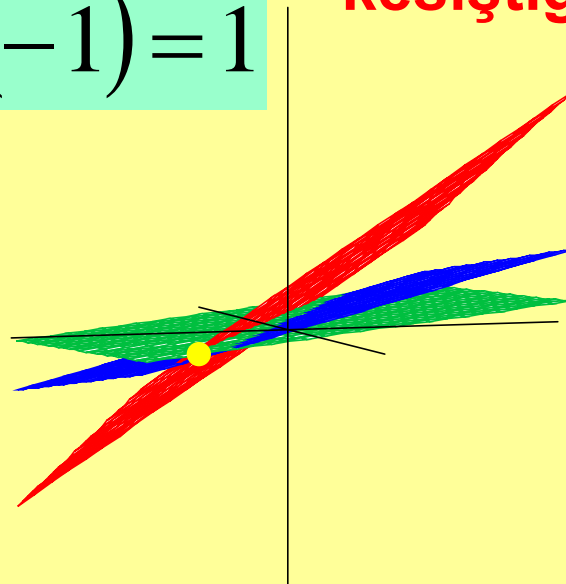
$$(-2) + 2(2) + (-1) = 1$$

$$3(-2) + 5(2) + (-1) = 3$$

$$2(-2) + 6(2) + 7(-1) = 1$$

**Hepsi doğru !**

**Geometrik olarak, üç  
düzlemin bir noktada  
kesiştiğini gösterir.**



# Satırca İndirgenmiş Eşelon Form

Satırca indirgenmiş eşelon formu elde etmek için, elementer satır işlemlerine aşağıdaki matris formu bulana kadar devam edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

"Amaç"

Bu metod geriye yerine koyma metodu gerektirmez. Sadece değişkenler yerine yazılarak çözüm bulunur.

Önceki örnekteki sistemi satırca indirgenmiş eşelon form kullanarak yapalım:

$$x + 2y + z = 1$$

$$3x + 5y + z = 3$$

$$2x + 6y + 7z = 1$$

$$\begin{array}{l} 3r_3+r_1 \\ -2r_3+r_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = -2, \quad y = 2, \quad z = -1$$

" Amaç "

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$



İlaveli matrisi, eşelon form getirmek için tanımladığımız bu metoda (veya algoritmaya) **Gauss Eliminasyon (yok etme)** denir.

İlaveli matrisi, satırca indirgenmiş eşelon forma getirmek için tanımladığımız metoda (veya algoritmaya) **Gauss-Jordan Yöntemi** denir.

Örnek:

İlaveli matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3x - 2y + 2z = 6$$

$$2x - 3y + 4z = 0$$

$$7x - 3y + 2z = -1$$

$$\begin{array}{l} -r_2 + r_1 \\ -2r_1 + r_2 \\ -7r_1 + r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

"Amaç"

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1_{18} & \# \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

$$3x - 2y + 2z = 6$$

$$2x - 3y + 4z = 0$$

$$7x - 3y + 2z = -1$$

$$\begin{matrix} -1/5r_2 \\ 10r_2+r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

**Olamaz! Eğer değişkenleri yerine yazarsak,  $0 = -19$  çelişmesine ulaşılır!**

**TUTARSIZ – ÇÖZÜM YOK !!!**

**" Amaç "**

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

One more:

$$5x - 6y + z = 4$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x - 3y - z = 5$$

$$-r_3 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1/3r_2 \\ -9r_2 + r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son satır hep sıfır. Değişkenleri yerine yazalım.

$$\begin{matrix} -2r_1 + r_2 \\ -4r_1 + r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

"Amaç"

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ } x \text{ \& } y \text{ için çözü}$$

$$x - z = 2$$

$$y - z = 1$$

$$z = z$$

İkinci sütunda, 1 in yukarısındaki elemanı sıfır yapmak için, bir adım daha gidelim.

$$3r_2+r_1 \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Z üzerinde bir kısıtlama yok.

$$x = z + 2$$

$$y = z + 1$$

$$z = z$$

**z herhangi bir reel sayı ise, sonsuz çözüm !!!**

$$5x - 6y + z = 4$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x - 3y - z = 5$$

$$5(2) - 6(1) + 0 = 4$$

$$2(2) - 3(1) + 0 = 1$$

$$4(2) - 3(1) - 0 = 5$$

**Bunun anlamı, z için herhangi bir değer alınıp, x ve y, z cinsinden bulunabilir. Sonsuz çözüm. z burada serbest değişken.**

**The solution can be written:  $(z + 2, z + 1, z)$**

$$x = z + 2$$

$$y = z + 1$$

$$z = z$$

**z = 1 için y = 2 ve x = 3**

**z = 0 için y = 1 ve x = 2**

**z herhangi bir reel sayı ise, sonsuz çözüm.**