Matrisler
Elementer Satır İşlemleri
Gauss Eliminasyon

Matrisler ve Satır İşlemleri

sütun

Bir matris dikdörtgen sayılar tablosudur. Alt indisler girdilerin yerini belirler.

satır $m \times n$

satır

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sütun

Matrisler boyutları ile tanımlanır.

1×5

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4×1

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4×4

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ -2 & 5 & -8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Satır ve sütun sayıları aynı olan matrislere **kare matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Esas Köşegen

Amaç: Bir lineer denklem sisteminin çözümünü bulmak

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + 5z &= 3 \\
-2x + y + 4z &= -2 \\
x + 4y - 7z &= 1
\end{aligned}
$$

Katsayı Matrisi

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
3x-2y+5z&=3\\
-2x+y+4z&=-2\\
x+4y-7z&=1
\end{aligned}
$$

Katsayı matrisine sistemin sağ tarafındaki sabitlerin eklenmesi ile elde edilen matrise ilaveli (arttırılmış) matris denir.

İlaveli Matris

$$
A=\left[\begin{array}{ccc|c}
3 & -2 & 5 & 3\\
-2 & 1 & 4 & -2\\
1 & 4 & -7 & 1
\end{array}\right]
$$

Elementer Satır İşlemleri

1. İki satırın yerlerini değiştirme
2. Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
3. Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme

Notasyon

Symbol	Tanım
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$ $(r_i + kr_j \rightarrow r_i)$	Bir satırın sabit bir katını diğer bir satıra ekleme
kR_i (kr_i)	Bir satırı sıfırdan farklı bir sabit ile çarpma
$R_i \leftrightarrow R_j$ $(r_i \leftrightarrow r_j)$	İki satırın yerlerini değiştirme

Satırca Eşelon Form

Elementer satır işlemleri kullanarak, ilaveli matrisi aşağıdaki gibi bir matris formuna getirebiliriz. # işareti sadece sayıları ifade etmektedir --- Ne olduğunun bir önemi yoktur.

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

"Amaç"

Matrisi, yukardaki forma getirdikten sonra, değişkenleri yerine yazarak, ve geriye yerine koyma metodu ile sistem çözülür.

Satır işlemlerini kullanarak eşelon formu elde etme:

$$x + 2y + z = 1$$
$$3x + 5y + z = 3$$
$$2x + 6y + 7z = 1$$

Zaten 1

İlaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

Satır 1 ‘ i alıp, sıfır elde etmek için, -3 ile çarpıp ikinci satır ile toplayacağız. Bunun için notasyon: $-3r_1 + r_2$ -> r_2

" Amaç "

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$-3r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -3r_1 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ +\,r_2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ \hline & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$-2r_1 + r_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Birinci sütun için amaca ulaşılmıştır.

$$\begin{array}{rrrrr} -2r_1 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ +\,r_3 & 2 & 6 & 7 & 1 \\ \hline & 0 & 2 & 5 & -1 \end{array}$$

Şimdi, 1.satır ‘ı -2 ile çarpıp 3. satıra eklenirse, sıfır elde edilmiş olur.

$$
\begin{array}{cc}
 & \\
-r_2 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \cancel{-}1 & \cancel{-}2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right]
\end{array}
\xrightarrow{-2r_2 + r_3}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

İkinci satırda 1 'e ihtiyacımız olduğundan, -1 ile çarpılır.

1 li satır 2 yi kullanarak, 1 in altını sıfır (0) yapmak için, ikinci satırı -2 ile çarpıp 3. satır ile toplayalım.

$$
\begin{array}{rrrrr}
-2r_2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\
+\,r_3 & 0 & 2 & 5 & -1 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array}
$$

Şimdi ikinci sütun, amaçlandığı gibidir.

Şimdi ikinci sütuna ilerleyerek yukarıda belirtilen amaç matrisini bulacağız.

$$
\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}
$$

$$\begin{array}{cccc} x\ \text{column} & y\ \text{column} & z\ \text{column} & \\ \end{array}$$

= işareti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$x + 2(2) + (-1) = 1$$

$$y + 2(-1) = 0$$

$$y = 2 \qquad z = -1$$

$$x = -2$$

İkinci denklemde z= -1 yazılarak, y bulunur.

Birinci denklemde y=1 ve z= -1 yazılarak, x bulunur.

Solution is: $(-2\ ,\ 2\ ,\ -1)$

3. Sütun istediğimiz formda olduğundan, elementer satır işlemlerini durdurup, geriye yerine koyma metodu ile çözüme geçilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

$$x + 2y + z = 1$$
$$3x + 5y + z = 3$$
$$2x + 6y + 7z = 1$$

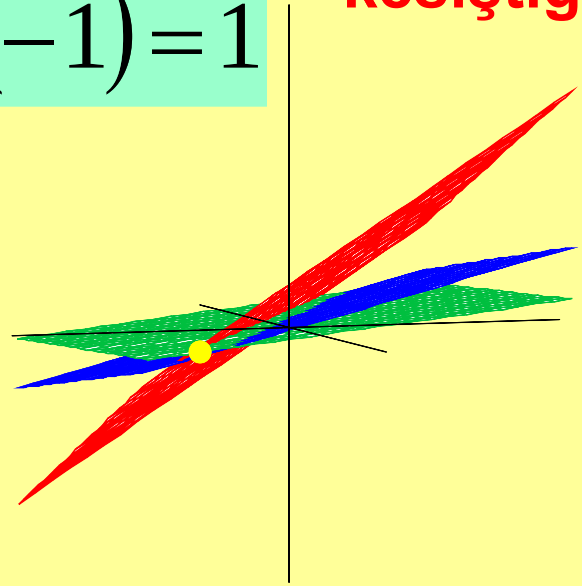
Solution is: $(-2\ ,\ 2\ ,\ -1)$

Sistemin tek çözümü budur. Sonucu doğrulamak için sistemde yerine yazalım.

$$(-2) + 2(2) + (-1) = 1$$
$$3(-2) + 5(2) + (-1) = 3$$
$$2(-2) + 6(2) + 7(-1) = 1$$

Hepsi doğru !

Geometrik olarak, üç düzlemin bir noktada kesiştiğini gösterir.



Satırca İndirgenmiş Eşelon Form

Satırca indirgenmiş eşelon formu elde etmek için, elementer satır işlemlerine aşağıdaki matris formu bulana kadar devam edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$$

"Amaç"

Bu metod geriye yerine koyma metodu gerektirmez. Sadece değişkenler yerine yazılarak çözüm bulunur.

Eşelon Formlar

Satırca eşelon formu	**Satırca indirgenmiş eşelon form**
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
İlk 1'ler ardışık satırlarda sağa kaydırılmıştır.	İlk 1'lerin altındaki ve üstündeki ler 0 dır.

Önceki örnekteki sistemi satırca indirgenmiş eşelon form kullanarak yapalım:

$$x+2y+z=1$$
$$3x+5y+z=3$$
$$2x+6y+7z=1$$

$3r_3+r_1$

$-2r_3+r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x=-2,\ \ y=2,\ \ z=-1$$

" Amaç " $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \# \\ 0 & 1 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$

İlaveli matrisi, *eşelon form* getirmek için tanımladığımız bu metoda (veya algoritmaya) **Gauss Eliminasyon (yok etme)** denir.

İlaveli matrisi, *satırca indirgenmiş eşelon* forma getirmek için tanımladığımız metoda (veya algoritmaya) **Gauss-Jordan Yöntemi** denir.

Örnek:

$$3x-2y+2z=6$$
$$2x-3y+4z=0$$
$$7x-3y+2z=-1$$

İlaveli matris:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -r_2+r_1 \\ -2r_1+r_2 \\ -7r_1+r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

" Amaç" $\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & -12 \\ 0 & -10 & 16 & -43 \end{bmatrix}$$

$$3x - 2y + 2z = 6$$
$$2x - 3y + 4z = 0$$
$$7x - 3y + 2z = -1$$

$$\begin{array}{r} \\ -1/5r_2 \\ 10r_2+r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{bmatrix}$$

Olamaz! Eğer değişkenleri yerine yazarsak, 0 = −19 çelişkisine ulaşılır!

TUTARSIZ SİSTEM – ÇÖZÜM YOK !!!

"Amaç" $\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$

Bir örnek daha :

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5x - 6y + z &= 4 \\ 2x - 3y + z &= 1 \\ 4x - 3y - z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -r_3 + r_1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ -2r_1 + r_2 \\ -4r_1 + r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ 1/3r_2 \\ -9r_2 + r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son satır hep sıfır.

" Amaç" $\begin{bmatrix} 1 & \# & \# & \# \\ 0 & 1 & \# & \# \\ 0 & 0 & 1 & \# \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x & y için çöz

$$\begin{aligned} x \quad - z &= 2 \\ y - z &= 1 \\ z &= z \end{aligned}$$

İkinci sütunda, 1 in yukarısındaki elemanı sıfır yapmak için, bir adım daha gidelim.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array} \\ 3r_2+r_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

z üzerinde bir kısıtlama yok.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= z + 2 \\ y &= z + 1 \\ z &= z \end{aligned}}$$

***z* herhangi bir reel sayı ise, sonsuz çözüm !!!**

$$5x-6y+z=4$$
$$2x-3y+z=1$$
$$4x-3y-z=5$$

$$5(2)-6(1)+0=4$$
$$2(2)-3(1)+0=1$$
$$4(2)-3(1)-0=5$$

Bunun anlamı, z için herhangi bir değer alınıp, x ve y , z cinsinden bulunabilir. Sonsuz çözüm. z burada serbest değişken.

The solution can be written: (*z* + 2 , *z* + 1 , *z*)

$$x=z+2$$
$$y=z+1$$
$$z=z$$

***z* = 1 için *y* = 2 ve *x* = 3**

***z* = 0 için *y* = 1 ve *x* = 2**

***z* herhangi bir reel sayı ise, sonsuz çözüm.**

Örnek:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

denklem sistemini *Gauss-Jordan yok etme metodu* (satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

- Arttırılmış matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \qquad -2R_1 + R_4 \rightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Önce $-R_2 \rightarrow R_2$ sonra $R_3 - 5R_2 \rightarrow R_3$ **ve** $R_4 - 4R_1 \rightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Önce $R_3 \leftrightarrow R_4$ **ve** sonra (1/6) $R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son olarak, $-3R_3 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Böylece karşılık gelen sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

x_2, x_4 ve x_5 serbest değişkenler olup, sonsuz çözüm

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3} \blacktriangleleft$$

Homojen Lineer Sistemler

- Homojen lineer bir denklem sistemi

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

formundadır.

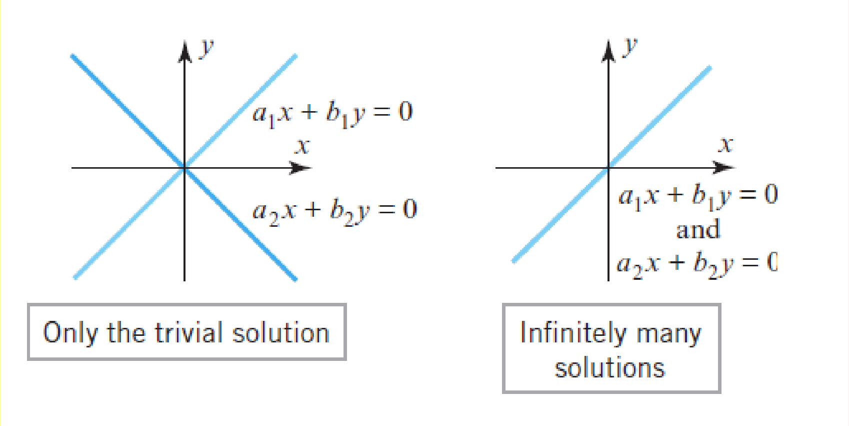
- Her homojen lineer denklem sistemi tutarlıdır

çünkü böylesi sistemler

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

çözümüne sahiptir.

- Buna *aşikar çözüm* denir.
- Eğer bundan başka çözüm varsa, *aşikar olmayan çözüm* vardır, denir. Bu durumda sonsuz çözüm vardır.
- Geometrik olarak,



Örnek:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sistemini *Gauss-Jordan yok etme metodu* (satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

- Homojen sistemin arttırılmış matris formu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

- Aynı elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Böylece karşılık gelen sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad\quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad\quad &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 &= -2x_4 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

x_2, x_4 ve x_5 serbest değişkenler olup, sonsuz çözüm

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = 0$$

NOT: $r = s = t = 0$ için aşikar çözüm elde edilir.

More Examples -System with No Solution

- Solve the system.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

  – We transform the system into row-echelon form.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- The last matrix is in row-echelon form.
- So, we can stop the Gaussian elimination process.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Now, if we translate this last row back into equation form, we get $0x + 0y + 0z = 1$, or $0 = 1$, which is false.
- No matter what values we pick for x, y, and z, the last equation will never be a true statement.
- This means the system has no solution.

Example - System with Infinitely Many Solutions

- Find the complete solution of the system.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x \qquad\quad + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

  – We transform the system into reduced row-echelon form.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+3R_1 \to R_3]{R_2+R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- The third row corresponds to the equation 0 = 0.
- This equation is always true, no matter what values are used for x, y, and z.
- Since the equation adds no new information about the variables, we can drop it from the system.

- So, the last matrix corresponds to the system

$$\begin{cases} x \qquad - 7z = -5 \\ \qquad y - 3z = \ \ 1 \end{cases}$$

  - Now, we solve for the leading variables *x* and *y* in terms of the nonleading variable *z*:

$$x = 7z - 5$$
$$y = 3z + 1$$

- To obtain the complete solution, we let t represent any real number, and we express x, y, and z in terms of t:
- $$x = 7t - 5$$
- $$y = 3t + 1$$
- $$z = t$$
  - We can also write the solution as the ordered triple $(7t - 5, 3t + 1, t)$, where t is any real number.

- In this example, to get specific solutions we give a specific value to t.

  - For example, if $t = 1$, then

$$x = 7(1) - 5 = 2$$
$$y = 3(1) + 1 = 4$$
$$z = 1$$

- Here are some other solutions of the system obtained by substituting other values for the parameter *t*.

Parameter t	Solution $(7t - 5, 3t + 1, t)$
-1	$(-12, -2, -1)$
0	$(-5, 1, 0)$
2	$(9, 7, 2)$
5	$(30, 16, 5)$

Example -System with Infinitely Many Solutions

- Find the complete solution of the system.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x + 3y - 3z - 4w = 15 \\ 2x + 2y - 6z - 8w = 10 \end{cases}$$

  - We transform the system into reduced row-echelon form.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 15 \\ 2 & 3 & -6 & -8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-4} & \mathbf{10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-10} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– Since the last row represents the equation $0 = 0$, we may discard it.

- So, the last matrix corresponds to the system

$$\begin{cases} x \qquad - 3z - 4w = 0 \\ \quad y \qquad\qquad\quad = 5 \end{cases}$$

  - To obtain the complete solution, we solve for the leading variables *x* and *y* in terms of the nonleading variables *z* and *w*, and we let *z* and *w* be any real numbers.

- Thus, the complete solution is:
- $$x = 3s + 4t$$
- $$y = 5$$
- $$z = s$$
- $$w = t$$
- where s and t are any real numbers.
  - We can also express the answer as the ordered quadruple $(3s + 4t, 5, s, t)$.

- Note that *s* and *t* do not have to be the same real number in the solution for Example.
  - We can choose arbitrary values for each if we wish to construct a specific solution to the system.