

ÇALIŞMA SORULARI-2

1. Aşağıdaki katsayı matrisi ve sağ taraf vektörü verilen $Ax = b$ lineer denklem sistemlerini Gauss eliminasyon (satırca eşelon veya satırca indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. k nin hangi değeri(leri) için $AB = BA$ dir.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ve $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. B nin birinci ve ikinci sütunlarını bulunuz.

4. Aşağıdaki matrislerin terslerini (varsa) bulunuz.

a. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 2/7 \\ -7 & -1/3 \end{bmatrix}$

5. Kabul edelim ki P tersinir bir matris ve $A = PBP^{-1}$. B 'yi A cinsinden çözünüz.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi ve $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörü veriliyor. $(Ax)^T$, $x^T A^T$, xx^T ve $x^T x$ leri hesaplayınız.

7. Verilen denklem sistemlerinin ilaveli matrislerini bulunuz.

a.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 7x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$
 denklem sistemini Gauss-Jordan yok etme metodu (satırca indirgenmiş

eşelon form) ile çözünüz.

9.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{cases}$$
 homojen denklem sistemini Gauss-Jordan yok etme metodu (satırca

indirgenmiş eşelon form) ile çözünüz.

10. Aşağıdaki sistemleri çözünüz.

a.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 3y + 2z = 8 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + 6z = 8 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} -x_1 + 2x_4 = 1 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

11. Aşağıdaki matrisleri ele alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aşağıda her bir şıkta verilen ifadeyi yukarıda verilen matrisler için (mümkünse) hesaplayınız.

- $D + E$
- $2B - C$
- $-3(D + 2E)$
- $\frac{1}{2}C^T - \frac{1}{4}A$
- $(2E^T - 3D^T)^T$
- $(CD)E$
- CC^T
- $(C^T B)A^T$
- $(AB)C$
- $(BA^T - 2C)^T$
- $B^T(CC^T - A^T A)$
- $(2D^T - E)A$
- $D^T E^T - (ED)^T$
- $(D - E)^T$
- $C(BA)$

12. $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

13. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x + ky + z = 0 \end{cases}$ sisteminin tam olarak bir çözüme sahip olması için k değeri ne olmalıdır? Bulunuz.

14. $\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 1)x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ homojen sisteminin aşikar olmayan çözüme sahip olması için λ nın tüm değerlerini

bulunuz.

15. $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi için, aşağıdakileri hesaplayınız.

- A^3
- A^{-3}
- $A^2 - 2A + I$ (I birim matris)

17. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

- $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$
- $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$

18. Eğer $p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ ve $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise $p(A) = 0$ olduğunu gösteriniz.

19. Bir A kare matrisine, $A^2 = A$ ise **idempotent** denir. A idempotent ise $I - A$ nında idempotent olduğunu gösteriniz. (I birim matris)

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ matrisinin idempotent olması için a ve b ne olmalıdır? Bulunuz.

21. $p(x) = x^2 - 2x - 3$ ve $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $p(A)$ 'yı bulunuz.

22. $f(x) = -10 + 5x - 2x^2 + x^3$ ve $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $f(A)$ 'yı bulunuz.

23. $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$ olması için λ ne olmalıdır? Bulunuz.

24. $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$ denklemini doğrulayınız.

25. M_{22} , 2×2 matrislerin vektör uzayı olmak üzere, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

26. M_{41} , 4×1 matrislerin vektör uzayı olmak üzere, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

27. Aşağıda katsayı matrisleri verilen $Ax = b$ sistemleri Cramer metodu ile çözünüz.

e. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

f. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

g. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

h. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

28. Verilen denklem sistemlerini Cramer metodu ile çözünüz.

a.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 = -5 \end{cases}$$

29. Aşağıdaki matrislerin terslerini (varsa) adjoint (eki) yöntemi ile bulunuz.

d.
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

e.
$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

f.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımlı veya bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

a. $u_1 = (-1, 2, 3), u_2 = (2, -4, -6), u_3 = (-2, -3, -4)$

b. $u_1 = (0, 0, 2, 2), u_2 = (3, 3, 0, 0), u_3 = (1, 1, 0, -1)$

c. $v_1 = (4, -1, 2), v_2 = (-4, 10, 2)$

d. $u_1 = (-3, 0, 4), u_2 = (5, -1, 2), u_3 = (1, 1, 3)$

31. Wronskian determinant testini kullanarak $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x$ fonksiyonlarının $(-\infty, \infty)$ aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

32. Wronskian determinant testini kullanarak $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x$ fonksiyonlarının $(-\infty, \infty)$ aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

33. Wronskian determinant testini kullanarak $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = x \cos x$ fonksiyonlarının $(-\infty, \infty)$ aralığında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

34. Wronskian determinant testini kullanarak $f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = (x+1)e^x$ fonksiyonlarının $(-\infty, \infty)$ aralığında lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

35. $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ ve $v_3 = (1, 3, 3, 3)$ vektörlerinin \mathbb{R}^4 'te lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

36. u ve v \mathbb{R}^n de vektörler olmak üzere, $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$ olduğunu gösteriniz.

37. P_3 üzerindeki $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ iç çarpımı kullanarak $\langle p, q \rangle$ yu hesaplayınız.

a. $p = 1 - x + x^2 + 5x^3$, $q = x - 3x^2$

b. $p = x - 5x^3$, $q = 2 + 8x^2$

38. u, v ve w vektörlerinin aşağıdaki eşitlikleri sağladığını varsayalım.

$$\langle u, v \rangle = 2, \quad \langle v, w \rangle = -3, \quad \langle u, w \rangle = 5$$

$$\|u\| = 1, \quad \|v\| = 2, \quad \|w\| = 7$$

Aşağıda verilen ifadeleri hesaplayınız.

a. $\langle u + v, v + w \rangle$

b. $\langle 2v - w, 3u + 2w \rangle$

c. $\langle u - v - 2w, 4u + v \rangle$

d. $\|u + v\|$

e. $\|2w - v\|$

f. $\|u - 2v + 4w\|$

39. Euclid iç çarpımını kullanarak aşağıda verilen vektörlerin Cauchy - Schwarz eşitsizliğini sağladığını gösteriniz.

d. $u = (3, 2)$, $v = (4, -1)$

e. $u = (-3, 1, 0)$, $v = (2, -1, 3)$

f. $u = (0, -2, 2, 1)$, $v = (-1, -1, 1, 1)$

40. $\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) - \cos(\theta) & \sin(\theta) + \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$ determinant değerinin θ dan bağımsız olduğunu gösteriniz.

41. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $k = 2$ için $\det(kA) = k^n \det(A)$ olduğunu doğrulayınız.

42. $A = \begin{bmatrix} \sec \theta & \tan \theta \\ \tan \theta & \sec \theta \end{bmatrix}$ matrisinin tersi olduğunu gösteriniz ve bulunuz.

43. $A = \begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi alınabilir olması için k ne olmalıdır ? Bulunuz.

44. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi alınabilir olması için k ne olmalıdır ? Bulunuz.

45. Matris tersi yöntemi ile $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ sistemin çözümünü bulunuz.

46. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisleri için $(AB)^T = (BA)^T$ olduğunu doğrulayınız.

47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi için A^{19} ve A^{20} kuvvetlerini bulunuz.

48. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ için $\det(AB) = \det(BA)$ olduğunu doğrulayınız.

49. A ve B matrisleri 2×2 tipinde olmak üzere, $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matris denklemini sağlayan hiçbir A ve B matrislerinin olmadığını gösteriniz.

50. $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$ matrisleri için $AB = BA$ olduğunu doğrulayınız.

51. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matris denkleminin hiçbir çözüme sahip olmadığını gösteriniz.

52. $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisini bulunuz.

53. A , bir 4×4 boyutunda bir matris ve $\det(A) = -2$ olmak üzere, aşağıdakileri hesaplayınız.

a. $\det(-A)$

b. $\det(A^{-1})$

c. $\det(2A^T)$

d. $\det(A^3)$