CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2019-2020 GÜZ DÖNEMİ
MAT 203, LİNEER CEBİR VE DİFERENSİYEL DENKLEMLERE GİRİŞ, FİNAL S.
02 ARALIK 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (10 p.)	2. (20 p.)	3. (25 p.)	4. (20 p.)	5. (25 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. (a) **u**, **v** ve **w** vektörlerinin şu eşitlikleri sağladığını varsayalım: $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -2$, $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 3$ $\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle = -5$ $||\mathbf{u}|| = 1$, $||\mathbf{v}|| = 2$ ve $||\mathbf{w}|| = 3$. Bu durumda $\langle 2\mathbf{u}-\mathbf{w}, 3\mathbf{u}+2\mathbf{w}\rangle$ ve $||2\mathbf{w}-\mathbf{v}||$ yi hesaplayınız.

$$\langle 2u-w, 3u+2w\rangle = \langle 2u,3u\rangle + \langle 2u,2w\rangle - \langle w,3u\rangle - \langle w,2w\rangle$$
$$= 6\langle u,u\rangle + 4\langle u,w\rangle - 3\langle w,u\rangle - 2\langle w,w\rangle$$
$$= 6.1 + 4.(-5) - 3(-5) - 2(9) = 6-20+15-18 = -17$$

$$||2w-v|| = \sqrt{\langle 2w-v, 2w-v\rangle} = \sqrt{\langle 2w,2w\rangle - \langle 2w,v\rangle - \langle v,2w\rangle + \langle v,v\rangle}$$
$$= \sqrt{4.9 - 2.(3) - 2(3) + 4} = \sqrt{36-6-6+4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(b) $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = u_1v_2 + u_2v_1$ eşitliği ile tanımlanan $\langle , \rangle$ fonksiyonu $\mathbf{R}^2$ uzayında bir iç çarpım tanımlar mı? Açıklayınız.

1) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ mu?

$\langle u,v\rangle = u_1v_2 + u_2v_1 = v_1u_2 + v_2u_1 = \langle v,u\rangle$ ✓

2) $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=0$ mı?

iç çarpım şartı sağlanmamakta çünkü $u=[1,0] \neq [0,0]$ olmasına rağmen

$\langle [1,0],[1,0]\rangle = 1.0 + 0.1 = 0$

Dolayısıyla iç çarpım değildir.

2. $y'' + y = \tan x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

y_h :

$r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp i \qquad y_h(x) = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin x}_{y_2}$

y_p :

$y_p = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)$ olacak şekilde $v_1(x) = ?$ $v_2(x) = ?$

$y_p' = v_1' y_1 + y_1' v_1 + v_2' y_2 + y_2' v_2$ ifadesinde $\boxed{v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0}$ $(*)$ alırsak

$y_p' = y_1' v_1 + y_2' v_2$ olur.

$y_p'' = y_1'' v_1 + y_1' v_1' + y_2'' v_2 + y_2' v_2'$

Şimdi bu ifadeleri denklemde yerine yazalım:

$y_1'' v_1 + y_1' v_1' + y_2'' v_2 + y_2' v_2' + v_1 y_1 + v_2 y_2 = \tan x$

$v_1 \underbrace{[y_1'' + y_1]}_{=0} + v_2 \underbrace{[y_2'' + y_2]}_{=0} + \boxed{v_1'[y_1'] + v_2'[y_2'] = \tan x}$ $(**)$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ olup $(*)$ ve $(**)$ dan aşağıdaki sistemi yazarız:

$/\sin x \quad v_1' \cos x + v_2' \sin x = 0$

$/\cos x \quad -v_1' \sin x + v_2' \cos x = \tan x$

$v_1' \cos x . \sin x + v_2' \sin^2 x = 0$

$-v_1' \cos x . \sin x + v_2' \cos^2 x = \tan x . \cos x = \sin x$

$+$

$v_2' (\sin^2 x + \cos^2 x) = v_2' = \sin x \Rightarrow v_2 = -\cos x$

$v_1' \cos x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow v_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow \int v_1' dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

$-\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\left[\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx \right] = -\left[\int \frac{1}{\cos x} dx - \int \cos x \, dx \right]$

$v_1 = -\left[\ln|\sec x + \tan x| - \sin x \right]$

$y_p = (-\ln|\sec x + \tan x| + \sin x) \cos x - \cos x . \sin x$

$= -\ln|\sec x + \tan x| . \cos x$

$y = y_h + y_p$ genel çözümü bulunur.

5. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x \sin x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar yöntemi ile bulunuz.

$\underline{y_h:}$ $r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2-1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \quad r_{3,4} = -1$

$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$

$\underline{y_p}$: Çözüm adayımız: $e^x(A\sin x + B\cos x)$

$y_p' = e^x(A\sin x + B\cos x) + e^x(A\cos x - B\sin x) = e^x\left[(A-B)\sin x + (A+B)\cos x\right]$

$y_p'' = e^x\left[(A-B)\sin x + (A+B)\cos x\right] + e^x\left[(A-B)\cos x - (A+B)\sin x\right] = e^x\left[-2B\sin x + 2A\cos x\right]$

$y_p''' = e^x\left[-2B\sin x + 2A\cos x\right] + e^x\left[-2B\cos x - 2A\sin x\right] = e^x\left[(-2A-2B)\sin x + (2A-2B)\cos x\right]$

$y_p^{(4)} = e^x\left[(-2A-2B)\sin x + (2A-2B)\cos x\right] + e^x\left[(-2A-2B)\cos x - (2A-2B)\sin x\right]$

$= e^x\left[-4A\sin x - 4B\cos x\right]$

Denklende yerine yazalım:

$e^x\left[-4A\sin x - 4B\cos x\right] - 2\left[e^x(-2B\sin x + 2A\cos x)\right] + \left[e^x(A\sin x + B\cos x)\right] = e^x \sin x$

$e^x \sin x \underbrace{(-4A + 4B + A)}_{=1} + e^x \cos x \underbrace{(-4B - 4A + B)}_{=0} = e^x \sin x$

$3/ \quad 4B - 3A = 1$

$4/ \quad -3B - 4A = 0$

$12B - 9A = 3$

$-12B - 16A = 0$

$-25A = 3$

$A = -\frac{3}{25}$

$4B + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow 4B = \frac{16}{25}$

$B = \frac{4}{25}$

$\therefore y_p(x) = e^x\left(-\frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x\right)$

$y_G = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + e^x\left(-\frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x\right)$

4. (a) 2x2 biçiminde bir A matrisinin özdeğerlerinin -1 ve 1 olduğu ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ olduğu veriliyor. A matrisini bulunuz.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$ olmak üzere

• $\lambda_1 = 1$ için

$$\begin{bmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2(a-1)+3b=0 \\ 2c+3(d-1)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a+3b=2 \\ 2c+3d=3 \end{matrix}$$

• $\lambda_2 = -1$ için

$$\begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+1+b=0 \\ c+d+1=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=-1 \\ c+d=-1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a=-5 \\ b=4 \\ c=-6 \\ d=5 \end{matrix}$$

2. YOL

$D = P^{-1}AP$
$A = PDP^{-1}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) $x' = y$, $y' = 6x - y$; $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ başlangıç değerli homojen lineer sisteminin çözümünü yok etme yöntemiyle bulunuz.

$x' = y$
$y' = 6x - y$

$$\underbrace{x'' = y' = 6x - y = 6x - x'}_{x'' + x' - 6x = 0}$$

$r^2 + r - 6 = 0$
$r_1 = 2$
$r_2 = -3$

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$
$x(0) = c_1 + c_2 = 1$

$x' = y \Rightarrow y(t) = 2c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-3t}$
$y(0) = 2c_1 - 3c_2 = 2$

$c_1 + c_2 = 1$
$2c_1 - 3c_2 = 2$

$-2c_1 - 2c_2 = -2$
$2c_1 - 3c_2 = 2$

$-5c_2 = 0$

$\boxed{\begin{matrix} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{matrix}}$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$x_1' + 3x_1 + 4x_2 = 2e^{-t} \Rightarrow x_1' = -3x_1 - 4x_2 + 2e^{-t}$$
$$x_1 - x_2' + x_2 = 0 \Rightarrow x_2' = x_1 + x_2$$

5. **Yukarıda verilen homojen olmayan lineer denklem sistemini temel matris yardımıyla çözünüz.**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(t)}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = 0$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -1$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2u_1 - 4u_2 &= 0 \\ u_1 + 2u_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k=1 \text{ seçersek } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2w_1 - 4w_2 &= 2 \\ w_1 + 2w_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2m \\ m \end{bmatrix}, \quad m=-1 \text{ seçersek } \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_1(t) = e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = e^{-t} \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t)] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & (2t+1)e^{-t} \\ -e^{-t} & (-t-1)e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det(X(t))} \cdot \begin{bmatrix} (-t-1)e^{-t} & -(2t+1)e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} = \frac{1}{-e^{-2t}} \begin{bmatrix} (-t-1)e^{-t} & -(2t+1)e^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{t} & (2t+1)e^{t} \\ -e^{t} & -2e^{t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = X(t)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + X(t)\int X^{-1}(t) f(t)\,dt$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} & (2t+1)e^{-t} \\ -e^{-t} & (-t-1)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} & (2t+1)e^{-t} \\ -e^{-t} & (-t-1)e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} (t+1)e^{t} & (2t+1)e^{t} \\ -e^{t} & -2e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2c_1e^{-t} + (2t+1)c_2e^{-t} \\ -c_1e^{-t} + (-t-1)c_2e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} & (2t+1)e^{-t} \\ -e^{-t} & (-t-1)e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2(t+1) \\ -2 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2c_1e^{-t} + (2t+1)c_2e^{-t} \\ -c_1e^{-t} + (-t-1)c_2e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{-t} & (2t+1)e^{-t} \\ -e^{-t} & (-t-1)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2+2t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1e^{-t} + (2t+1)c_2e^{-t} + 2e^{-t}(-t^2+t) \\ -c_1e^{-t} + (-t-1)c_2e^{-t} + t^2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$