Birinci mertebeden diferensiyel denklemler:

Ayrılabilir dif. denk. $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) = \frac{g(x)}{f(y)}$

Lineer denklem: $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \Rightarrow \rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

Bernoulli denklemi: $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)\,v = (1-n)\,Q(x)$$

Homogen denklem: $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Tam diferensiyel denklem $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ise denklem tamdır

Riccati denklemi: $\frac{dy}{dx} = A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x)$

$y_1(x)$ denklemin bir özel çözümü olsun.

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)\,v = -A$$

3) $\dfrac{dy}{dx} + y = x y^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

Çözüm: Bernoulli denklemi $n=3$

$v = y^{1-3} = y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa;

$y = v^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\,\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} v^{-3/2} \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dx} + v^{-1/2} = x\, v^{-3/2} \qquad (-2v^{3/2})$$

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x \qquad \text{(Lineer denklem)}$$

$$\rho = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - e^{-2x}\,2v = -2x e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x} v\right) = -2xe^{-2x}$$

$$e^{-2x} v = -2\int x e^{-2x}\, dx = -2\left[x.\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{2}\, dx\right]$$

$x = u \qquad e^{-2x}dx = dv$

$dx = du \qquad \dfrac{e^{-2x}}{-2} = v$

$$= xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2} + C$$

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$$

$v = y^{-2} \Rightarrow y^{-2} = x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$ bulunur.

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$ $\quad y(1)=2$ BD.P ni Çözünüz

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\frac{y}{x}-3}{2-\frac{y}{x}}$

$\dfrac{y}{x} = u$ olsun $\Rightarrow$ $y = ux$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u.$$

$$u + \frac{du}{dx}x = \frac{4u-3}{2-u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{4u-3-2u+u^2}{2-u}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2-u}{\underbrace{u^2+2u-3}_{(u+3)(u-1)}}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-1} = \frac{2-u}{(u+3)(u-1)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=-1 \\ -A+3B=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 4B=1 \\ B=\frac{1}{4} \\ A=-\frac{5}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}\int \frac{1}{u+3}\,du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}\,du = \ln|x| + C$$

$$-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{y}{x}+3\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \ln|x| + C$$

$-\frac{5}{4}\ln 5 = C$ olur

$$-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{y}{x}+3\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \ln|x| - \frac{5}{4}\ln 5$$

5) $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümü bulunuz.

$$y' = -y^2 + 2(x-1)y - x^2 + 2x + 1$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow y = x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{-x^2} - \frac{1}{v^2} - \cancel{\frac{2x}{v}} + \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + \cancel{\frac{2x}{v}} - \frac{2}{v} - \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v^2} - \frac{2}{v} \qquad (-v^2 \text{ ile çarpalım})$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + 2v \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2v = 1 \qquad (\text{lineer denklem})$$

$$\rho = e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}v\right) = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}v = \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

$$v = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

b) $(xy^2+bx^2y)\,dx + (x+y)x^2\,dy = 0$ dif. denkleminin tam olması için b ne olmalıdır? Bulduğunuz b değeri için dif. denk. genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $M(x,y) = (xy^2 + bx^2y)$

$N(x,y) = (x+y)x^2$

Dif. denk. tam olması için $M_y = N_x$ olmalı

$$2xy + bx^2 = 3x^2 + 2xy \Rightarrow b=3 \text{ olmalı}$$

$F_x = xy^2 + 3x^2y$ ve $\underset{(*)}{F_y = (x+y)x^2}$ o.ş. F fonk bulacağız

$\Downarrow$

$$F = \int (xy^2 + 3x^2y)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + g(y)$$

$\Downarrow$

$$F_y = x^2y + x^3 + g'(y) \overset{*\text{dan}}{=} x^3 + x^2y \Rightarrow g'(y) = 0$$

$$\Rightarrow g(y) = c \quad (c \text{ sabit})$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + C$$

- İkinci mertebeden diferensiyel denklemler (Sabit Katsayılı)

$ay'' + by' + cy = 0$

$ar^2 + br + c = 0$ karakteristik denklem

1\. durum $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve $r_1 \neq r_2$ ise $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

2\. durum $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve $r_1 = r_2 = r$ ise $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

3\. durum $r_{1,2} = a \pm ib$ ise $y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Yüksek mertebeden dif. denklemler:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y + a_0 = 0$

$a_n r^n + a_{n-1} r^n + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ karakteristik denklem

1 durum $r_1, \dots r_n \in \mathbb{R}$ ve $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n$ ise

$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

2\. durum $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ ve k katlı r kökü varsa;

$(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{rx} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \dots c_n e^{r_n x}$

3\. durum tekrarlı kompleks kök

k katlı $a \pm bi$ kökü varsa;

$\sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax} (c_i \cos bx + d_i \sin bx) + \dots$

7) $y'' - 2y' + y = te^t + 4 \qquad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1$ BDP ni çözünüz

Çözüm: 1. Adım $\quad y'' - 2y' + y = 0$ homojen denklemin çözümünü bulalım

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_1 t e^t$$

2. Adım $\quad$ özel çözüm adayı belirle

$$te^t \rightarrow te^t, \ e^t$$

$$4 \rightarrow 0$$

$$y_p = A + \underline{Be^t + Cte^t}$$

$$y_p = A + B\underline{t^2}e^t + C\underline{t^3}e^t$$

3. Adım $\quad y_p$ yi $\quad y'' - 2y' + y = te^t + 4$ denkleminde yerine koy

$$y_p' = 2Bte^t + \underline{Bt^2}e^t + \underline{3Ct^2}e^t + C\underline{t^3e^t}$$

$$y_p'' = 2Be^t + 2B\underline{te^t} + (B+3C)2\underline{te^t} + (B+3C)\underline{t^2e^t} + 3C\underline{t^2e^t} + C\underline{t^3e^t}$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = t^3e^t(C - 2C + C) + t^2e^t(3C - 6C + B + B + 3C - 2B)$$

$$te^t(2B + 6C - 4B + 2B) + 2Be^t + A = te^t + 4$$

$$A = 4 \qquad B = 0 \qquad C = \frac{1}{6}$$

$$y_p = 4 + \frac{1}{6}t^3e^t$$

4. Adım $\quad y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2te^t + 4 + \frac{1}{6}t^3e^t$

B.K. yerine koyup c_1 ve c_2 yi bul

$$y(0) = c_1 + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -3$$

$$y' = c_1e^t + c_2te^t + c_2e^t + \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t \Rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 4$$

8) $y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$ dif denk genel çözümünü bulunuz. (Özel çözümün sadece formatını yazınız)

Çözüm: $y''' - 4y' = 0$ denkleminin çözümünü bulalım

$r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = -2$

$y_h = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$

$t \to t \quad 0 \quad \to \quad At + B$

$\cos t \to \cos t \quad \sin t \quad \to \quad C\cos t + D\sin t$

$e^{-2t} \to e^{-2t} \quad \to \quad Ee^{-2t}$

$y_p = At^2 + Bt + C\cos t + D\sin t + Ete^{-2t}$

$y = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + At^2 + Bt + C\cos t + D\sin t + Ete^{-2t}$

9) $(D^2 - 6D + 13)^2 (D+7)(D-1)^3 y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklem

$(r^2 - 6r + 13)^2 (r+7)(r-1)^3 = 0$

$(r^2 - 6r + 13)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$ (çift katlı)

$r + 7 = 0 \Rightarrow r = -7$

$(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r = 1$ (3 katlı)

$y = e^{3t}(c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t) + te^{3t}(c_3\cos 2t + c_4 \sin 2t)$
$+ c_5 e^{-7t} + c_6 e^{3t} + c_7 te^{3t} + c_8 t^2 e^{3t}$

11) Her noktasındaki eğimi onoklanın apsisi ve ordinatı toplamına eşit olan ve (0,3) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = x+y \Rightarrow y' - y = x$$

$$p = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}(y.e^{-x}) = xe^{-x}$$

$$ye^{-x} = \int xe^{-x}\,dx$$

$x = u \qquad e^{-x}dx = dv$

$dx = du \qquad -e^{-x} = v$

$$ye^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow y = -x - 1 + ce^{x}$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = -1 + c \Rightarrow c = 4$$

$$y = -x - 1 + 4e^{x}$$

12) $(x+y)y' = 1$ diferensiyel denklemini çözünüz.

$y' = \frac{1}{x+y}$, $x+y = u$ olsun

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u}$$ (ayrılabilir dif denk.)

$$\Rightarrow \frac{u}{u+1}du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{u+1-1}{u+1}du = \int dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u+1| = x + C$$

$$\Rightarrow x+y - \ln|x+y+1| = x + C \Rightarrow \boxed{y - \ln|x+y+1| = C}$$

1) $x^2y'' + 2xy' - 12y = x^3 + 4x$ diferensiyel denklemnin genel çözümünü bulunuz. (Özel çözüm için katsayı hesaplamayınız)

Not: Euler denklemi: $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$

a, b, c sabit

Çözüm: $x>0$ o.ü. $v = \ln x$ $(x = e^v)$ olsun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2}\underbrace{\frac{dv}{dx}}_{=\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dv}$$

$$x^2\left(\frac{d^2y}{dv^2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dv}\right) + 2x\left(\frac{dy}{dv}\cdot\frac{1}{x}\right) - 12y = e^{3v} + 4e^v$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \frac{dy}{dv} - 12y = e^{3v} + 4e^v$$

$r^2 + r - 12 = 0 \Rightarrow r_1 = -4,\ r_2 = 3$ (Homojen kısmın çözümü)

$\begin{matrix} +4 \\ -3 \end{matrix}$

$$y_h = c_1e^{-4v} + c_2e^{3v}$$

$e^{3v} \to e^{3v}$ $\quad Ae^{3v} \Rightarrow Ave^{3v}$ (Homojen kısımdan lineer bağımsız yapmak için v ile çarptık)

$e^{v} \to e^{v} \Rightarrow Be^{v}$

$$y_p = Ave^{3v} + Be^{v}$$

$$y(x) = c_1x^{-4} + c_2x^3 + A\ln x\cdot x^3 + Bx$$ olur.

2) $x' = 4x + y + 2t$ diferensel denklem sistemini yok etme

$y' = -2x + y$ yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: $y = x' - 4x - 2t$ (1. denklemde y yi çektik)

$y' = x'' - 4x' - 2$

y' ve y yi 2. denklemde yerine yazalım

$x'' - 4x' - 2 = -2x + x' - 4x - 2t$

$x'' - 5x' + 6x = -2t + 2$ (2. mertebeden homogen olmayan denklem)

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 3$ $\Rightarrow$ $x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$

$x_p = At + B$

$x_p' = A$ $\Rightarrow$ $-5A + 6At + 6B = -2t + 2$

$x_p'' = 0$

$A = -\frac{1}{3}$

$-5A + 6B = 2$

$\frac{5}{3} + 6B = 2$

$6B = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{1}{18}$

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{18}$

$y(t) = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{3} - 4c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{3t} + \frac{4}{3}t - \frac{4}{18} - 2t$

$= -2c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} - \frac{2t}{3} - \frac{10}{18}$

3) $x_1' = 2x_1 - 5x_2$

$x_2' = 4x_1 - 2x_2 \quad ; \quad x_1(0) = 2 \;,\; x_2(0) = 3$

B.D.P nin Çözünüz.

Çözüm. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}}_{=A} x \;,\; x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4 + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i$$

$\lambda = 4i$ için özvektör bulalım:

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4i & -5 \\ 4 & -2-4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2-4i \,/\; (2-4i)v_1 - 5v_2 = 0$ (1. denklem 2. denklemin $(2-4i)$ katı)

$4v_1 - (2+4i)v_2 = 0$

$\therefore\; (2-4i)v_1 = 5v_2 \Rightarrow v_1 = 5 \quad v_2 = 2-4i$ seçilebilir

$$x(t) = e^{4it}\begin{bmatrix} 5 \\ 2-4i \end{bmatrix} = (\cos 4t + i\sin 4t)\begin{bmatrix} 5 \\ 2-4i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix}}_{x_1(t)} + i\underbrace{\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}}_{x_2(t)}$$

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}$$

$$x(0) = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5} \qquad \begin{aligned} 2c_1 - 4c_2 &= 3 \\ c_2 &= -\frac{11}{20} \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix} - \frac{11}{20}\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}$$