Ad Soyad: **06.11.2016**

Bölüm:

1	2	3	4	5	TOPLAM

No:

İmza:

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ

MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER ARA SINAV SORULARI

1) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 Puan)**

2) M gram tuz suda erirken t dakika sonra, erimeden geriye kalan tuz miktarı $A(t)$'dir ve

$\frac{dA}{dt} = -kA, (\, k > 0)$ denklemini sağlamaktadır. Eğer tuzun $1/4$ ü 1 dakikada erirse, yarısı ne kadar sürede erir? **(20 Puan)**

3) $(Ax^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 4xy)dy = 0$ veriliyor. Denklemin tam diferensiyel olması için A sabitinin değerini bulunuz. Bulduğunuz A sabitini denklemde yerine yazarak denklemin genel çözümünü bulunuz. **(20 Puan)**

4) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x)\,, y(0) = 1, y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz. **(20 Puan)**

5) $y^{(4)} - 6y''' + 22y'' - 30y' + 13y = 2x + 5$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.**(20 Puan)**

Not: Her soru eşit değerli olup, sınav süresi 100 dakikadır.

Başarılar dileriz.

CEVAPLAR

— Cevaplar —

1. Bu soruda $\frac{dy}{dx}+y=xy^3$ denkleminin genel çözümünü bulmanız istenıyor. Verilen denklem bir Bernoulli denklemidir. Burada $n=3$ olup $u=y^{1-n}=y^{1-3}=y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa verilen denklem lineer hale dönüşür. Gerçekten denklemin her iki tarafını y^3'e böler ve $u=y^{-2}$ dönüşümünü uygularsak,

$\frac{du}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}$ olacağından

verilen denklem,

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+u=x \longrightarrow \frac{du}{dx}-2u=-2x \text{ olur.}$$

$$\lambda=e^{\int -2dx}=e^{-2x} \text{ gereğince}$$

$\frac{d}{dx}[u.e^{-2x}]=-2x.e^{-2x}$ bulunur. Integral alıp kısaltma işlemini yaparsak,

$$u=e^{+2x}\left(\int e^{-2x}(-2x)dx+C\right)=e^{2x}\left(xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+C\right)$$

$u=y^{-2}$ olduğundan İstenen genel çözüm

$$y^{-2}=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}$$ olarak bulunur.

---

2. Burada,

M gram tuz suda erirken t dakika sonra, erimeden geriye kalan tuz miktarı $A(t)$, $\frac{dA}{dt}=-kA$, $(k>0)$ denklemini sağlamaktadır.

Eğer tuzun $\frac{1}{4}$ ü 1 dakikada erirse, yarısı ne kadar sürede erir. Sorusuna cevap istenir.

$\frac{dA}{dt} = -kA$ ayrılabilir bir diferensiyel denklemdir. Çözümü $A(t) = C \cdot e^{-kt}$ dir.

$A(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} = M$ ve $C = M$ olur ve

$A(t) = M \cdot e^{-kt}$ bulunur. $A(1) = M - \frac{1}{4}M = \frac{3}{4}M = M \cdot e^{-k}$

Böylece $e^{-k} = \frac{3}{4}$ olmalıdır. Şimdi tuzun yarısı ne kadar sürede erir? sorusuna cevap verebiliriz.

$$A(t) = M \cdot e^{-kt} = \frac{1}{2}M \Rightarrow (e^{-k})^t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1}{2}$$

ve $t = \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{3}{4}}$ istenen cevaptır.

---

3) Bu soruda $(Ax^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 4xy)dy = 0$ denkleminin tam diferensiyel olması için A sabiti hesaplanacak ve sonra denklem çözülecek.

$M = Ax^2y + 2y^2 \Rightarrow M_y = Ax^2 + 4y$

$N = x^3 + 4xy \Rightarrow N_x = 3x^2 + 4y$

$\Rightarrow M_y = N_x$ ve $A = 3$ olur.

$\therefore (3x^2y + 2y^2)dx + (x^3 + 4xy)dy = 0$ tam diferensiyeldir.

$$F(x,y) = \int (3x^2y + 2y^2)dx + h(y) = C \Rightarrow$$

$$= x^3y + 2y^2x + h(y) = C \Rightarrow F_y = N = x^3 + 4xy = x^3 + 4xy + h'(y)$$

$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C_1$ ve

$F(x,y) = x^3y + 2y^2x + C_1 = C$ istenen çözümdür.

(4) Burada $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos 3x$, $y(0)=1, y'$ başlangıç değer problemi çözülecektir.

Önce homogen kısmın genel çözümünü bulmalıyız.

$y'' - 3y' + 2y = 0$'ın karakteristik denklemi

$K(k) = k^2 - 3k + 2 = 0$ ve $k_1 = 1,\ k_2 = 2$ olup

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$ bulunur.

$$e^{-x} \rightarrow e^{-x}$$

$$\cos 3x \rightarrow \sin 3x \rightarrow \cos 3x$$

olup; y_h'ın hiçbir terimi ile lineer bağımlılık yoktur.

Böylece özel çözüm,

$$y_p = Ae^{-x} + B\cos 3x + C\sin 3x \quad \text{şeklindedir.}$$

Gerekli türevler alınır ve verilen denklemde yerine konursa,

$y_p' = -Ae^{-x} - 3B\sin 3x + 3C\cos 3x$, $y_p'' = Ae^{-x} - 9B\cos 3x - 9C\sin 3x$

olacağından

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 6Ae^{-x} + (-7B - 9C)\cos 3x + (9B - 7C)\sin 3x$$
$$= 3e^{-x} - 10\cos 3x$$ sağlanmalıdır. Burada

$$\left.\begin{aligned} 6A &= 3 \\ -7B - 9C &= -10 \\ 9B - 7C &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{7}{13},\ C = \frac{9}{13}$$ bulunur. Böylece

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\sin 3x$$ olur.

O halde

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}\sin 3x$$ olur.

$y(0) = 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{13}$ ve

$y'(x) = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{21}{13}\sin 3x + \frac{27}{13}\cos 3x$

$y'(0) = 2 = c_1 + 2c_2 - \frac{1}{2} + \frac{27}{13}$

$y(0)=1$ ve $y'(0)=2$ eşitliklerinden $c_1=-\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{6}{13}$ bulunur. Böylece başlangıç değer probleminin istenen çözümü

$$y(x)=-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{6}{13}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{2}{13}\cos 3x+\frac{3}{13}\sin 3x$$

olur.

---

5) Bu soruda $y^{(4)}-6y'''+22y''-30y'+13y=2x+5$ denkleminin genel çözümü isteniyor. Önce y_h'ı bulmalıyız. Bunun için homogen kısmın karakteristik polinomunu kullanmalıyız.

$K(k)=k^4-6k^3+22k^2-30k+13=0$ olduğundan

$k_1=k_2=1$, $k_3=2+3i$, $k_4=2-3i$ bulunur.

$$y_h=(c_1+c_2x)e^{x}+e^{2x}(c_3\cos 3x+c_4\sin 3x)$$

olur.

$y_p=Ax+B$ alınarak verilen denklemde yerine konursa

$0-6\cdot 0+22\cdot 0-30A+13(Ax+B)=2x+5$ bulunur.

$\Rightarrow 13B-30A=5$

$13A=2 \Rightarrow A=\frac{2}{13}$ ve $B=\frac{1}{13}\left(5+30\cdot\frac{2}{13}\right)=\frac{125}{13}$

olduğundan $y_p=\frac{2}{13}x+\frac{125}{13}$ ve böylece genel çözüm

$$y=y_h+y_p=(c_1+c_2x)e^{x}+e^{2x}(c_3\cos 3x+c_4\sin 3x)+\frac{2}{13}x+\frac{125}{13}$$

istenen genel çözümdür.

Ad Soyad:

Bölüm:

No:

İmza:

23.10.2011

1	2	3	4	5	Toplam

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER I. ARASINAV SORULARI

1) T gram şeker suda erirken t dakika sonra, erimeden kalan $A(t)$ miktarı $dA/dt = -kA$, $(k>0)$ denklemini sağlar. Eğer şekerin %25 i 1 dakikada erirse, yarısı ne kadar sürede erir? **(20 puan)**

10puan

Çözüm: $\frac{dA}{dt} = -kA$ Ayrılabilir diferansiyel denklem

$\frac{dA}{A} = -k\,dt \Rightarrow$ Her iki tarafın integralini alalım

$\int \frac{dA}{A} = \int -k\,dt \Rightarrow \ln A = -kt + c_1 \; (A>0) \Rightarrow A(t) = e^{-kt+c_1} \Rightarrow A(t) = Ce^{-kt}$

Başlangıçta şeker miktarı T olduğundan $A(0) = T$'dir

$A(0) = Ce^{-k\cdot 0} = T \Rightarrow C = T$ bulunur. O halde genel çözüm: $A(t) = Te^{-kt}$ dir.

5 puan

Eğer şekerin %25'i 1 dk erirse; 1 dk. sonra kalan miktar $T - \frac{1}{4}T = \frac{3}{4}T$ 'dir

$\therefore A(1) = \frac{3}{4}T \Rightarrow Te^{-k} = \frac{3}{4}T \Rightarrow e^{-k} = \frac{3}{4}$ bulunur.

5 puan

Şekerin yarısının ne kadar sürede eridiğini bulmak için $A(t) = \frac{1}{2}T$ denklemi çözülmeli:

$A(t) = Te^{-kt} = \frac{1}{2}T \Rightarrow (e^{-k})^t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) / \ln\left(\frac{3}{4}\right)$ elde edilir.

2) $(\cos x + \ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + e^y\right)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

Çözüm: $M(x,y) = \cos x + \ln y$

$N(x,y) = \frac{x}{y} + e^y$

M nin y ye göre, N nin x e göre kısmi türevlerini alalım:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} = \frac{\partial N}{\partial y}$ olduğundan verilen dif. denklem tam diferansiyel denklemdir.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M$ old.dan; $F(x,y) = \int M\,dx = \int (\cos x + \ln y)dx$

$= \sin x + x\ln y + g(y)$

Şimdi $F(x,y)$'nin y'ye göre türevini alalım:

$F_y(x,y) = \frac{x}{y} + g'(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = N$ old.dan $\frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + e^y$

$g'(y) = e^y$

$g'(y) = e^y \Rightarrow g(y) = \int e^y\,dy = e^y + c$ bulunur

$\therefore$ Genel Çözüm: $F(x,y) = \sin x + x\ln y + e^y + c$

3) $xy' + y = y^2 \ln x, x > 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. (20 puan)

Çözüm:

3puan: Verilen diferansiyel denklem bir Bernoulli denklemidir.

$v = y^{1-n}$ dönüşümü yapmalıyız.

$n = 2$ old.dan; $v = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{v}$ dir.

2puan: Her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$ elde edilir.

5puan: y ve $\frac{dy}{dx}$ verilen dif. denk'de yerine yazılırsa;

$$-\frac{x}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} = \frac{1}{v^2}\ln x$$

Her iki tarafı $-\frac{v^2}{x}$ ile çarparsak

$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ lineer dif. denklem elde edilir.

2puan: integral çarpanı metodu kullanarak elde edilen lineer dif. denk. çözelim.

Burada $P(x) = -1/x$ dir.

$$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1} \text{ (integral çarpanı)}$$

3puan: Elde edilen lineer dif. denk her iki tarafını integral çarpanı ile çarpalım:

$$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}v\right) = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{v}{x} = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$\ln x = u$ $\quad \frac{1}{x^2}dx = dv$ olsun

$\frac{dx}{x} = du$ $\quad -\frac{1}{x} = v$

$$\Rightarrow \frac{v}{x} = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx\right) = +\frac{\ln x}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right) + C$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Rightarrow v = \ln x + 1 + Cx \text{ elde edilir.}$$

2puan: $v = \frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx \Rightarrow$ genel çözüm $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$

4) $y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

8 puan

Çözüm: İlk önce homogen kısmın; yani $y^{(3)} + y'' = 0$ denkleminin y_h genel çözümünü bulmalıyız. Karakteristik denklem:

$p(k) = k^3 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k+1) = 0$. Buradan $k_{1,2} = 0$ $k_3 = -1$ bulunur. Böylece;

$y_h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$ olur.

4 puan

Şimdi de homogen olmayan kısmın y_p özel çözümünü bulalım. $f(x) = 3e^x + 4x^2$ dir. İlk olarak bir çözümü;

$y_p(x) = Ae^x + B + Cx + Dx^2$ olarak alalım.

Burada $y_p(x)$ yi oluşturan $1, x, x^2$ ile $y_h(x)$ i oluşturan $1, x$ lineer bağımlı, fakat $y_p(x)$ i oluşturan e^x ile $y_h(x)$ in terimleri lineer bağımsızdır. O halde $y_p(x)$ in $B + Cx + Dx^2$ kısmı x^2 ile çarpılmalıdır. Buna göre;

$y_p(x) = Ae^x + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ olmalıdır.

6 puan

$y_p'(x) = Ae^x + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3$

$y_p''(x) = Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2$

$y_p'''(x) = Ae^x + 6C + 24Dx$

$y_p'''(x)$ ve $y_p''(x)$ verilen denklemde yerine koyulursa:

$Ae^x + 6C + 24Dx + Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2 = 3e^x + 4x^2$

$$\begin{aligned} 2A &= 3 \\ 12D &= 4 \\ 24D + 6C &= 0 \\ 6C + 2B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \tfrac{3}{2} \\ B &= 4 \\ C &= -\tfrac{4}{3} \\ D &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

2 puan

Buna göre $y_p(x) = \frac{3}{2}e^x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4$ olur.

∴ Genel Çözüm $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

$= \frac{3}{4}e^x + 4x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$ olur.

5) a) $y(0) = y'(0) = 2, y''(0) = 1$ için $y^{(3)}(x) = y''(x)$ olacak şekilde bir $y(x)$ fonksiyonu bulunuz. **(20 puan)**

5puan

Gözüm: $y^{(3)}(x) - y''(x) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulmalıyız

Karakteristik denklemi:

$$r^3 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r-1) = 0$$

Buradan $r_1 = 1$ ve $r_{2,3} = 0$ bulunur.

O halde genel çözüm: $y(x) = c_1 e^x + c_2 + c_3 x$ olur

$y'(x) = c_1 e^x + c_3$

$y''(x) = c_1 e^x$

5puan

Verilen başlangıç koşullarını kullanarak c_1, c_2, c_3 katsayılarını bulalım:

$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 2$

$y'(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_3 = 2 \Rightarrow c_2 = 1,\ c_3 = 1$

$y''(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$\therefore\ y(x) = e^x + 1 + x$ olur.

b) Sabit katsayılı homogen lineer bir diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri $3, -5, 0, 0, 0, 4 \pm 7i,\ 4 \pm 7i$ dir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümünü yazınız. **(20 puan)**

Gözüm: $r_1 = 3$, $r_2 = -5$) reel kökler (3 puan)

$r_3 = 0$, $r_4 = 0$, $r_5 = 0$) Katlı reel kök (3 puan)

$r_{6,7} = 4 \pm 7i$, $r_{8,9} = 4 \pm 7i$) Katlı kompleks kök (4 puan)

$$\text{Genel çözüm: } y(x) = \underbrace{c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}}_{\text{reel kök}} + \underbrace{c_3 + c_4 x + c_5 x^2}_{\text{Katlı reel kök}}$$

$$\underbrace{+ e^{4x}(c_6 \cos 7x + c_7 \sin 7x) + x e^{4x}(c_8 \cos 7x + c_9 \sin 7x)}_{\text{Katlı kompleks kök}}$$

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

Ad Soyad: **27.11.2011**

Bölüm:

No:

İmza:

1	2	3	4	5	Toplam

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER II. ARASINAV SORULARI

1) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz.**(20 puan)**

2) $x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3$ sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz. **(20 puan)**

$x_2' = -4x_1 - 3x_2 - x_3$

$x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$

3) $x' = 3x + 4y$ sistemini yok etme(eliminasyon) yöntemi ile çözünüz. **(20 puan)**

$y' = 3x + 2y$

4) a) $F(s) = \frac{2}{s^2+4s+8} + \frac{5s+1}{s^2+1}$ fonksiyonunun **Ters Laplace** dönüşümünü bulunuz. **(10 puan)**

b) $f(t) = t^2 \sin kt$ fonksiyonunun **Laplace** dönüşümünü bulunuz.**(10 puan)**

5) $x'' + 4x = \cos t$, $x(0) = 5, x'(0) = 0$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.**(20 puan)**

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

Ad Soyad:

27.11.2011

Bölüm:

1	2	3	4	5	Toplam

No:

İmza:

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER II. ARASINAV SORULARI

1) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} X$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz.**(20 puan)**

05

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisinin karakteristik denklemini bulalım.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Özdeğerleri bulmak için karakteristik denklemin köklerini bulalım.

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$$

05

$\lambda_1 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 & 1 \\ 4 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2a_1 + b_1 = 0 \\ 4a_1 - 2b_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Bu iki denklemden $2a_1 = b_1$ olduğu görülür.

O halde $a_1 = 1$ seçersek $b_1 = 2$ olur ve $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

05

$\lambda_2 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ 4 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a_2 + b_2 = 0 \\ 4a_2 + 2b_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Bu iki denklemden $b_2 = -2a_2$ olduğu bulunur.

O halde $a_2 = 1$ seçersek $b_2 = -2$ olur ve $v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

05

Genel çözüm $\Rightarrow$ $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

yani; $x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

$x_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}$

2) $x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3$ sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz. **(20 puan)**
$x_2' = -4x_1 - 3x_2 - x_3$
$x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$

Çözüm: $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow x' = Ax$

Katsayılar matrisi A nın karakteristik denklemini bulalım:

04 $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & -3-\lambda & -1 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) + (-4) + 16 - 4(3+\lambda) + 4(2-\lambda) + 4(2-\lambda)$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4$

Özdeğerleri bulmak için karakteristik denklemin köklerini bulalım;

$-\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = +\lambda^2(1-\lambda) + 4(1-\lambda) = (\lambda^2+4)(1-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$ bulunur.

* $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım

$(A-\lambda_1 I)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

04 $\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 - d_1 = 0 \\ -4a_1 - 4b_1 - d_1 = 0 \\ 4a_1 + 4b_1 + d_1 = 0 \end{array}\right\}$ Bu üç denklemi çözersek $d_1 = 0$ ve $a_1 = -b_1$ bulunur. $a_1 = 1$ seçilirse $b_1 = -1$ olur.

$\therefore\ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ elde edilir.

* $\lambda_{2,3} = \mp 2i$ kompleks özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım.

$\lambda_2 = 2i$ 'yi ele alalım:

$(A-\lambda_2 I)\, v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-2i & 1 & -1 \\ -4 & -3-2i & -1 \\ 4 & 4 & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-2i & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -3-2i & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2-2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2-2i & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -3-2i & -1 & 0 \\ 0 & 1-2i & 1-2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to (1+2i) r_3]{r_1 \to (2+2i) r_1 + 2 r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4-2i & -4-2i & 0 \\ -4 & -3-2i & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right]$

04

Buradan; $-4a_2 + (-3-2i)b_2 - d_2 = 0$
$(2-2i)b_2 = (2i-2)d_2$ $\Rightarrow$ $b_2 = -2+2i$ seçilirse $d_2 = 2-2i$ olur.

$-4a_2 + (-3-2i)(-2+2i) - 2+2i = 0 \Rightarrow 4a_2 = +6-6i+4i+4-2+2i$
$4a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 2$

$\therefore\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+2i \\ 2-2i \end{bmatrix}$ elde edilir.

04

$x' = Ax$ sisteminin $x(t) = ve^{\lambda t}$ kompleks değerli çözümü;

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+2i \\ 2-2i \end{bmatrix} e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2+2i \\ 2-2i \end{bmatrix} (\cos 2t + i\sin 2t) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t + 2i\sin 2t \\ -2\cos 2t - 2i\sin 2t + 2i\cos 2t - 2\sin 2t \\ 2\cos 2t + 2i\sin 2t - 2i\cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix}$$

$x(t)$ çözümünün reel ve sanal kısımları;

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ 2\cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ -2\sin 2t + 2\cos 2t \\ 2\sin 2t - 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

reel değerli çözümlerdir.

04

$x' = Ax$ sisteminin reel değerli genel çözümü;

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 x_1(t) + c_3 x_2(t)$$

$$x(t) = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ -2\cos 2t - 2\sin 2t \\ 2\cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ -2\sin 2t + 2\cos 2t \\ 2\sin 2t - 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = c_1 e^{t} + 2c_2\cos 2t + 2c_3 \sin 2t$$
$$x_2(t) = -c_1 e^{t} + c_2(-2\cos 2t - 2\sin 2t) + c_3(-2\sin 2t + 2\cos 2t)$$
$$x_3(t) = c_2(2\cos 2t + 2\sin 2t) + c_3(2\sin 2t - 2\cos 2t)$$

bulunur.

3) $x' = 3x + 4y$ sistemini yok etme(eliminasyon) yöntemi ile çözünüz. **(20 puan)**
$y' = 3x + 2y$

10

Çözüm: $x' = 3x + 4y$ --- (1)
$y' = 3x + 2y$ --- (2)

(1) denkleminden $y = \frac{x'}{4} - \frac{3}{4}x$ elde edilir. Bu denklemde her iki tarafın türevi alınırsa;

$$y' = \frac{x''}{4} - \frac{3}{4}x'$$ elde edilir

y ve y' (2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x''}{4} - \frac{3}{4}x' = 3x + \frac{2}{4}x' - \frac{6}{4}x \Rightarrow x'' - 5x' - 6x = 0$$

ikinci mertebeden lineer dif. denk. elde edilir

10

Karakteristik denklem: $r^2 - 5r - 6 = 0$
$(r-6)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 6 \quad r_2 = -1$ bulunur.

$\therefore$ $x(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t}$ bulunur.

$x'(t) = 6c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t}$ dir.

$$y(t) = \frac{x'(t)}{4} - \frac{3}{4}x(t) \Rightarrow y(t) = \frac{6}{4}c_1 e^{6t} - \frac{c_2}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}c_1 e^{6t} - \frac{3}{4}c_2 e^{-t}$$

$$= \frac{3}{4}c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t}$$ bulunur.

Çözüm: (II. yol)

$x' = 3x + 4y$ --- (1)

$y' = 3x + 2y$ --- (2)

(2) denkleminden $x = \frac{y'}{3} - \frac{2}{3}y$ elde edilir. Bu denklemde her iki tarafın türevi alınırsa;

$x' = \frac{y''}{3} - \frac{2}{3}y'$ elde edilir.

x ve x' (1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{y''}{3} - \frac{2}{3}y' = y' - 2y + 4y \Rightarrow \frac{y''}{3} - \frac{5}{3}y' - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y'' - 5y' - 6y = 0$$

ikinci mertebeden lineer dif. denklemi elde edilir.

Karakteristik denklem: $r^2 - 5r - 6 = 0$

$(r-6)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 6 \quad r_2 = -1$ bulunur.

$\therefore \; y(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t}$

$y'(t) = 6c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t}$

$$x(t) = \frac{6c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t}}{3} - \frac{2}{3}\left(c_1 e^{6t} + c_2 e^{-t}\right)$$

$$= \frac{4}{3}c_1 e^{6t} - c_2 e^{-t}$$

4) **a)** $F(s)=\frac{2}{s^2+4s+8}+\frac{5s+1}{s^2+1}$ fonksiyonunun **Ters Laplace** dönüşümünü bulunuz. **(10 puan)**

Çözüm: $F(s)=\frac{2}{(s+2)^2+4}+5\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$ şeklinde yazılabilir.

5
0

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+4}\right\}+5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$ 0.5

$$=e^{-2t}\sin 2t+5\cos t+\sin t \quad \text{'dir.}$$

b) $f(t)=t^2\sin kt$ fonksiyonunun **Laplace** dönüşümünü bulunuz.**(10 puan)**

Çözüm: Kural: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n F^{(n)}(s)$ dir.

5
0

$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2}$ olduğundan

$$\mathcal{L}\{t^2\sin kt\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right]$$

$$=\frac{d}{ds}\left[-2sk(s^2+k^2)^{-2}\right]$$

5
0

$$=-2k(s^2+k^2)^{-2}+4sk\,.\,2s(s^2+k^2)^{-3}$$

$$=\frac{-2k}{(s^2+k^2)^2}+\frac{8ks^2}{(s^2+k^2)^3}$$

5) $x'' + 4x = \cos t, x(0) = 5, x'(0) = 0$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.**(20 puan)**

<u>Çözüm:</u> $x'' + 4x = \cos t$ denkleminde her iki tarafa Laplace dönüşümünü uygularsak;

$$\mathcal{L}\{x''+4x\} = \mathcal{L}\{\cos t\} \Rightarrow \mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{4x\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$X(s)(s^2+4) - 5s = \frac{s}{s^2+1}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4}\left(\frac{s}{s^2+1} + 5s\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+1} + 5\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

Şimdi $X(s)$ nin ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+1} + 5\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos t) + 5\cos 2t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t-\tau)\sin 2\tau\, d\tau + 5\cos 2t \qquad \left(\text{Not: } \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2}\left[\sin(2\tau - t + \tau) + \sin(2\tau + t - \tau)\right] d\tau + 5\cos 2t$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(3\tau - t)\, d\tau + \frac{1}{4}\int_0^t \sin(\tau + t)\, d\tau + 5\cos 2t$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\cos(3\tau - t)}{3}\Big|_0^t - \frac{1}{4}\cos(\tau + t)\Big|_0^t + 5\cos 2t$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{12}\cos(-t) - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos t + 5\cos 2t$$

$$= +\frac{14}{3}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos t$$

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

II. yol
$X(s)$ nin ters laplace dönüşümünü bulalım:

$$\frac{1}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+1}=\underset{(s^2+1)}{\frac{as+b}{s^2+4}}+\underset{(s^2+4)}{\frac{cs+d}{s^2+1}}=\frac{as^2+bs^2+as+b+cs^3+ds^2+4cs+4d}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$\begin{aligned} a+c&=0 \\ a+4c&=1 \\ b+4d&=0 \\ b+d&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &a=-c \\ &3c=1 \Rightarrow c=\tfrac{1}{3} \text{ ve } a=-\tfrac{1}{3} \\ &b=d=0 \end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{s^2+1}$ olur.

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}+5\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1}+5\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos t+5\cos 2t=\frac{14}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos t$$ bulunur.

Ad Soyad: 08.12.2011

Bölüm:

No:

İmza:

1	2	3	4	5	Toplam

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER TELAFİ SINAVI SORULARI

1) $x'' + 3x' - 10x = 0$ diferansiyel denklemini, birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemine dönüştürünüz ve sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz.**(20 puan)**

2) $x_1' = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$ sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile bulunuz. **(20 puan)**

$x_2' = -6x_1 - 6x_2 - 5x_3$

$x_3' = 6x_1 + 6x_2 + 5x_3$

3) $x' = 4x - 3y$ sistemini yok etme(eliminasyon) yöntemi ile çözünüz. **(20 puan)**
$y' = 8x - 6y$

4) a) $F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s+4)^3}$ fonksiyonunun **Ters Laplace** dönüşümünü bulunuz. **(10 puan)**

b) $f(t) = t^2 e^{at} \sin bt$ fonksiyonunun **Laplace** dönüşümünü bulunuz.**(10 puan)**

5) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}, y(0) = 2, y'(0) = -1$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.**(20 puan)**

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

Ad Soyad: **08.12.2011**

Bölüm:

1	2	3	4	5	Toplam

No:

İmza:

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER TELAFİ SINAVI SORULARI

1) Su üzerinde kayan bir motorbotun v hızının $\frac{dv}{dt} = kv^2$ diferansiyel denklemini sağladığını varsayalım. Motorbotun başlangıç hızı saniyede 10 metredir(m/sn) ve motorun hızı $v = 5m/sn$ olduğunda $1m/sn^2$ hızla azalıyor. Botun hızının $1m/sn$ ye düşmesi ne kadar zaman alır?**(20 puan)**

2) $(e^x siny - 2ysinx)dx + (e^x cosy + 2cosx)dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü blunuz.**(20 puan)**

3) $xy' = y + x e^{y/x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

4) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$ $y(0) = 1, y'(0) = 1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

5) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$ Riccati denkleminin genel çözümünü $y_1(x) = x$ özel çözümünü kullanarak bulunuz.(İpucu: $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$ dönüşümünü kullanabilirsiniz.)**(20 puan)**

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

Ad Soyad: 18.12.2011

Bölüm:

1 ◯	2 ◯	3 ◯	4 ◯	5	6	7	Toplam

No:

İmza:

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER GENEL SINAV SORULARI

Aşağıdaki sorulardan birini seçerek cevaplandırınız. Seçtiğiniz soruyu işaretleyiniz.

1) $y' = \sqrt{x+y+1}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

2) $y' = 1 + x^2 - y^2$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü $y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$ dönüşümünü kullanarak bulunuz. **(20 puan)**

Cevap 1) $y' = \sqrt{x+y+1}$ dif. denk çözmek için $u = x+y+1$ dönüşümünü kullanalım.

$u = x+y+1$ ⇒ Her iki tarafın x'e göre türevini alalım.

$u' = 1 + y'$ olur.

u ve u' yerine yazılırsa;

$u' - 1 = \sqrt{u}$ diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{u'}{\sqrt{u}+1} = 1 \Rightarrow \int \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \int dx \Rightarrow \int \frac{2a\,da}{1+a} = \int dx$$

$\sqrt{u} = a$ olsun

$\frac{1}{2\sqrt{u}} du = da$

$1 + a = b \Rightarrow b = \sqrt{u} + 1$

$a = b - 1$

$da = db$

$$\Rightarrow 2\int \frac{(b-1)\,db}{b} = \int dx$$

$$\Rightarrow 2b - 2\ln|b| = x + C$$

b yerine yazılırsa $\Rightarrow 2\sqrt{u} + 2 - 2\ln|\sqrt{u}+1| = x + C$

u yerine yazılırsa;

$2\sqrt{x+y+1} + 2 - 2\ln|\sqrt{x+y+1} + 1| = x + C$ elde edilir.

Cevap2) $y'=1+x^2-y^2$ dif. denk. çözmek için $y=x+\frac{1}{u}$ dönüşümünü kullanalım.

$y=x+\frac{1}{u}$ $\Rightarrow$ her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa;

$$y'=1-\frac{1}{u^2}u'$$ elde edilir

y ve y' denklemde yerine yazılırsa;

$$1-\frac{1}{u^2}u' = 1+x^2-\left(x^2+\frac{1}{u^2}+2\frac{x}{u}\right)$$

$\Rightarrow \frac{1}{u^2}u' = \frac{1}{u^2}+\frac{2x}{u} \Rightarrow u' = 1+2xu$ lineer dif. denk elde edilir.

$\therefore$ $u'-2xu=1$ denkleminin çözmek için integral çarpanını bulalım.

$$p=e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$ bulunur.

Her iki tarafı p ile çarpalım:

$$e^{-x^2}u'-2xe^{-x^2}u = e^{-x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}u\right) = e^{-x^2}$$

Her iki tarafın integralini alalım

$$e^{-x^2}u = \int e^{-x^2}dx$$ bulunur.

$$\therefore \quad u = e^{x^2}\int e^{-x^2}dx$$

u yerine yazılırsa; $\left(u=\frac{1}{y-x}\right)$

$$\frac{1}{y-x} = e^{x^2}\int e^{-x^2}dx \Rightarrow y = x+\left(e^{x^2}\int e^{-x^2}dx\right)^{-1}$$

Aşağıdaki sorulardan birini seçerek cevaplandırınız. Seçtiğiniz soruyu işaretleyiniz.

3) $y'' + y = g(t), y(0) = 3, y'(0) = -1$ başlangıç değer probleminin çözümünü $g(t)$ cinsinden yazınız. **(20 puan)**

4) $(D^2 - 1)^4(D^2 + 4)^2(D + 2)y = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

Cevap 3) BDP 'ni LD yardımıyla çözelim:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 y(s) - 3s + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = y(s)$$

$$\therefore \mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 y(s) - 3s + 1 + y(s) = G(s)$$

$$\Rightarrow y(s)(s^2+1) = G(s) + 3s - 1$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{G(s)}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$$

$y(t)$ 'yi bulmak için $y(s)$ nin ters laplace dönüşümüne bulalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = g(t) * \cos t + 3\cos t - \sin t$$

$$= \int_0^t g(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau + 3\cos t - \sin t$$ elde edilir.

Cevap 4) Dif. denklemin karakteristik denklemi:

$(r^2-1)^4(r^2+4)^2(r+2) = 0$ 'dır:

$(r^2-1)^4 = 0 \Rightarrow r_{1,2,3,4} = 1$, $r_{5,6,7,8} = -1$; $(r^2+4)^2 = 0 \Rightarrow r_{9}, r_{10}, r_{11}, r_{12} = \pm 2i$, $r+2=0 \Rightarrow r_{13} = -2$

$$\therefore y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)e^x + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2 + c_8 x^3)e^{-x}$$
$$+ e^{0.x}(c_9 \cos 2x + c_{10} \sin 2x) + x e^{0x}(c_{11}\cos 2x + c_{12}\sin 2x) + c_{13}e^{-2x}$$

bulunur.

5) $x' = y + t$ homogen olmayan lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü
$y' = 2x + y$ bulunuz. **(20 puan)**

Cevap: Öncelikle homogen kısmın çözümünü bulalım:

$$\begin{matrix} x' = y \\ y' = 2x + y \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Özdeğerleri bulalım:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$\lambda_1 = 2$ için özvektör bulalım

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2a_1 = b_1 \text{ elde edilir.}$$

$a_1 = 1$ olsun $\Rightarrow b_1 = 2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$ için özvektör bulalım:

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = -b_1 \text{ elde edilir.}$$

$a_1 = 1$ olsun $\Rightarrow b_1 = -1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O halde homogen kısmın genel çözümü:

$$x_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \text{ dir.}$$

Şimdi de homogen olmayan kısmın özel çözüm bulalım

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_p(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$ formunda bir deneme

çözümü seçilebilir.

$$x_p'(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_p \text{ ve } x_p' \text{ denklemde yerine yazılırsa}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 t + m_1 \\ k_2 t + m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 t + m_2 + t \\ 2k_1 t + 2m_1 + k_2 t + m_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad k_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow k_2 = -1$

$m_2 = k_1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{1}{2}$

$2k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$

$2m_1 + m_2 = k_2 \Rightarrow 2m_1 + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow 2m_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{4}$

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3/4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Sistemin Genel Çözümü:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} t + -3/4 \\ -t + 1/2 \end{bmatrix}$$

6) $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$ denkleminin Frobenius seri çözümlerini bulunuz. **(20 puan)**

Cevap: Denklemi $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ standard formunda yazalım.

$$y'' + \frac{x}{2x^2}y' - \frac{(3-2x^2)}{2x^2}y = 0$$

Burada $P(x) = \frac{1}{2x}$ ve $Q(x) = -\frac{(3-2x^2)}{2x^2}$ dir.

$\therefore$ $x=0$ tekil noktadır.

$p(x) = x\,P(x) = \frac{1}{2}$ ve $q(x) = x^2 Q(x) = \frac{2x^2-3}{2}$

$x=0$ $p(x)$ ve $q(x)$ için adi noktadır.

$\therefore$ $x=0$ dif. denk. düzgün tekil noktasıdır.

$p_0 = p(0) = \frac{1}{2}$, $q_0 = q(0) = -\frac{3}{2}$ dir. $p(x)$ ve $q(x)$ polinom oldıdan elde edilen frobenius serileri $\forall x$ için yakınsak olur.

İndisel denklem:

$$r(r-1) + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2r^2 - r - 3 = 0 \Rightarrow (r+1)(2r-3) = 0$$

$$r_1 = -1 \quad r_2 = \frac{3}{2}$$

Cösler $r_1 = -1$, $r_2 = \frac{3}{2}$ olup, farkları tamsayı değildir. O halde iki lineer bağımsız frobenius seri çözümünü garanti eder

$\therefore$ Çözümün genel formu: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ olur.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)\, x^{n+r-1} \quad \text{ve} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)\, x^{n+r-2}$$

y, y' ve y'' denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} = 0$$

4. terimde indisi indirgeyelim;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}\, x^{n+r} = 0$$

$n \geq 2$ ortak derece old.dan, $n=0$ ve $n=1$ için ayrı ayrı incelemeliyiz.

$n=0$ için;

$$2r(r-1)c_0 + r c_0 - 3c_0 = 0 \Rightarrow (2r^2 - r - 3)\, c_0 = 0$$

$n=1$ için;

$$2(r+1)(r)\,c_1 + (r+1)\,c_1 - 3c_1 = 0 \Rightarrow (2r^2 + 3r - 3)\,c_1 = 0$$

Burada $r_1 = -1$ veya $r_2 = \frac{3}{2}$ için $2r^2+3r-3 \neq 0$ old. dan $c_1 = 0$ dır.

$r_1 = -1$ ve $r_2 = \frac{3}{2}$ için $2r^2 - r - 3 = 0$ olddan c_0 keyfi sabit olarak alınır.

x^{n+r} nin katsayısı;

$$2(n+r)(n+r-1)c_n + (n+r)c_n - 3c_n + 2c_{n-2} = 0$$

$$c_n = \frac{-2c_{n-2}}{2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3} \quad n \geq 2$$ indirgeme bağıntısı elde edilir.

*Durum 1: $r_1 = -1$ ve c_n yerine a_n yazalım;

$$a_n = \frac{-2a_{n-2}}{2(n-1)(n-2) + (n-1) - 3}$$

n tek olduğunda $a_n = 0$ olduğu görülür.

$n = 2, 4, 6$ için

$$a_2 = \frac{-2a_0}{-2} = a_0, \quad a_4 = \frac{-2a_2}{12} = \frac{-a_0}{6}, \quad a_6 = \frac{-2a_4}{42} = \frac{a_0}{21}$$

$$y_1(x) = a_0\, x^{-1}\left(1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{21} + \cdots\right)$$

* Durum 2: $r_2 = \frac{3}{2}$ ve c_n yerine a_n yazalım:

$$b_n = \frac{-2b_{n-2}}{2(n+\frac{3}{2})(n+\frac{3}{2}-1)+(n+\frac{3}{2})-3}$$

n tek olduğunda $b_n = 0$ olduğu görülür.

$n = 2, 4, 6$ için

$$b_2 = \frac{-2b_0}{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - 3} = \frac{-2b_0}{18} = \frac{-b_0}{9}$$

$$b_4 = \frac{-2b_2}{2 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{9}{2} + \frac{11}{2} - 3} = \frac{-2b_2}{52} = \frac{-b_2}{26} = \frac{b_0}{9.26}$$

$$b_6 = \frac{-2b_4}{2 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{13}{2} + \frac{15}{2} - 3} = \frac{-2b_4}{102} = \frac{-b_4}{51} = \frac{-b_0}{9.26.51}$$

$$y_2(x) = b_0 x^{3/2}\left(1 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9.26}x^4 - \frac{1}{9.26.51}x^6 + \cdots\right)$$

Genel Çözüm: $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ olarak bulunur.

7) $f(x) = \begin{cases} -2, & -5 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 5 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz. **(20 puan)**

Cevap: f(x) fonksiyonu bir tam periyot üzerinde tanımlı 10 periyotlu bir fonksiyondur.

Burada L= 5 'dir.

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \sin\frac{n\pi t}{L}$$

Burada; $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{0.\pi t}{L}\,dt$

$$= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(t)\,dt = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} -2\,dt + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 2\,dt$$

$$= \frac{1}{5}(-2t)\Big|_{-5}^{0} + \frac{1}{5}(2t)\Big|_{0}^{5}$$

$$= \frac{1}{5}(-10) + \frac{1}{5}\cdot 10 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(t)\cos\frac{n\pi t}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} -2.\cos\frac{n\pi t}{5}\,dt + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 2\cos\frac{n\pi t}{5}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\left(-2\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{5}\right)\Big|_{-5}^{0} + \frac{1}{5}\left(2\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{5}\right)\Big|_{0}^{5}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}(0-0) + \frac{2}{n\pi}(0-0) = 0 \text{ bulunur.}$$

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(t)\sin\frac{n\pi t}{5}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} -2\sin\frac{n\pi t}{5}\,dt + \int_{0}^{5} 2\sin\frac{n\pi t}{5}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{+2.5}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{5}\right)\Big|_{-5}^{0} - \left(\frac{2.5}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{5}\right)\Big|_{0}^{5}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{10}{n\pi} - \frac{10}{n\pi}(-1)^n - \frac{10}{n\pi}(-1)^n + \frac{10}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{20}{n\pi} - \frac{20}{n\pi}(-1)^n\right] = \frac{4}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\therefore\quad b_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi n}, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

Böylece fourier serisi

$$f(t) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n\,\text{tek}} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi t}{5}$$

$$= \frac{8}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{5} + \cdots\right)$$

3) $xy' + y = y^2 \ln x, x > 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

Çözüm:

Verilen diferansiyel denklem bir Bernoulli denklemidir.

$v = y^{1-n}$ dönüşümü yapmalıyız.

$n = 2$ old.dan ; $v = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{v}$ dir.

2puan

Her iki tarafın x'e göre türevini alalım:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$ elde edilir.

y ve $\frac{dy}{dx}$ verilen dif. denk.'de yerine yazılırsa;

$-\frac{x}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v} = \frac{1}{v^2}\ln x$

Her iki tarafı $-\frac{v^2}{x}$ ile çarparsak

$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ lineer dif. denklem elde edilir.

integral çarpanı metodu kullanarak elde edilen lineer dif. denk. çözelim.

Burada $P(x) = -1/x$ dir.

$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$ (integral çarpanı)

Elde edilen lineer dif. denk her iki tarafını integral çarpanı ile çarpalım:

$\frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}v\right) = -\frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \frac{v}{x} = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$\ln x = u$ $\quad \frac{1}{x^2}dx = dv$ olsun

$\frac{dx}{x} = du$ $\quad -\frac{1}{x} = v$

$\Rightarrow \frac{v}{x} = -\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx\right) = +\frac{\ln x}{x} - \left(-\frac{1}{x}\right) + C$

$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \Rightarrow v = \ln x + 1 + Cx$ elde edilir.

$v = \frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx \Rightarrow$ genel çözüm $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$

4) $y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(20 puan)**

Çözüm: İlk önce homogen kısmın; yani $y^{(3)}+y''=0$ denkleminin y_h genel çözümünü bulmalıyız. Karakteristik denklemi

$p(k)=k^3+k^2=0 \Rightarrow k^2(k+1)=0$. Buradan $k_{1,2}=0$ $k_3=-1$ bulunur. Böylece;

$y_h(x)= c_1+c_2x+c_3e^{-x}$ olur.

Şimdi de homogen olmayan kısmın y_p özel çözümünü bulalım $f(x)=3e^x+4x^2$ dir. İlk olarak bir çözümü;

$y_p(x)=Ae^x+B+Cx+Dx^2$ olarak alalım.

Burada $y_p(x)$ yi oluşturan $1, x, x^2$ ile $y_h(x)$i oluşturan $1, x$ lineer bağımlı, fakat $y_p(x)$ i oluşturan e^x ile $y_h(x)$ in terimleri lineer bağımsızdır. O halde $y_p(x)$ in $B+Cx+Dx^2$ kısmı x^2 ile çarpılmalıdır. Buna göre;

$y_p(x)=Ae^x+Bx^2+Cx^3+Dx^4$ olmalıdır.

$y_p'(x)= Ae^x+2Bx+3Cx^2+4Dx^3$

$y_p''(x)= Ae^x+2B+6Cx+12Dx^2$

$y_p'''(x)= Ae^x+6C+24Dx$

$y_p'''(x)$ ve $y_p''(x)$ verilen denklemde yerine koyulursa:

$Ae^x+6C+24Dx+Ae^x+2B+6Cx+12Dx^2 = 3e^x+4x^2$

$$\begin{aligned} 2A&=3 \\ 12D&=4 \\ 24D+6C&=0 \\ 6C+2B&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=\tfrac{3}{2} \\ B&=4 \\ C&=-\tfrac{4}{3} \\ D&=\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Buna göre $y_p(x)=\frac{3}{2}e^x+4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4$ olur.

∴ Genel Çözüm $y(x)=y_p(x)+y_h(x)$

$=\frac{3}{4}e^x+4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+c_1+c_2x+c_3e^{-x}$ olur.

5) **a)** $y(0) = y'(0) = 2, y''(0) = 1$ için $y^{(3)}(x) = y''(x)$ olacak şekilde bir $y(x)$ fonksiyonu bulunuz. **(20 puan)**

Çözüm: $y^{(3)}(x) - y''(x) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulmalıyı

Karakteristik denklemi:

$$r^3 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r-1) = 0$$

Buradan $r_1 = 1$ ve $r_{2,3} = 0$ bulunur.

O halde genel çözüm: $y(x) = C_1 e^x + C_2 + C_3 x$ olur.

$y'(x) = C_1 e^x + C_3$

$y''(x) = C_1 e^x$

Verilen başlangıç koşullarını kullanarak C_1, C_2, C_3 katsayıları nı bulalım:

$y(0) = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2$

$y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1, \; C_3 = 1$

$y''(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$\therefore \; y(x) = e^x + 1 + x$ olur.

b) Sabit katsayılı homogen lineer bir diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri $3, -5, 0, 0, 0, 4 \pm 7i, \; 4 \pm 7i$ dir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümünü yazınız. **(20 puan)**

Çözüm: $r_1 = 3$, $r_2 = -5$) reel kökler (3 puan)

$r_3 = 0$, $r_4 = 0$, $r_5 = 0$) Katlı reel kök (3 puan)

$r_{6,7} = 4 \pm 7i$, $r_{8,9} = 4 \pm 7i$) Katlı kompleks kök (4 puan)

Genel çözüm:

$$y(x) = \overbrace{C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x}}^{\text{reel kök}} + \overbrace{C_3 + C_4 x + C_5 x^2}^{\text{Katlı reel kök}}$$

$$\underbrace{+ e^{4x}(C_6 \cos 7x + C_7 \sin 7x) + x e^{4x}(C_8 \cos 7x + C_9 \sin 7x)}_{\text{Katlı kompleks kök}}$$

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

Ad Soyad: **29.12.2011**

Bölüm:

1	2	3	4	5	Toplam

No:

İmza:

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT-202 DİFERENSİYEL DENKLEMLER MEZUNİYET EK SINAVI SORULARI

1) $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**(20 puan)**

Çözüm: $x\frac{dy}{dx} = 2x^2y + y$ ayrılabilir dif. denklemdir.

$$x\frac{dy}{dx} = y(2x^2+1)$$

$\frac{dy}{y} = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right)dx$ olur. Her iki tarafın integralini alalım:

$\ln y = x^2 + \ln x + c$ elde edilir.

$$e^{\ln y} = e^{x^2} \cdot e^{\ln x} \cdot e^{c}$$

$y = ce^{x^2} x$ çözümü bulunur.

2) $y'' - 2y' + 2y = \cancel{x+1}\ e^{-t};\ y(0) = 0,\ y'(0) = \cancel{0}\ 1$ başlangıç değer problemini çözünüz. **(20 puan)**

Çözüm: $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$ denkleminde her tarafın laplace dönüşümünü alalım:

$$\mathcal{L}\{y\} = y(s) \quad \text{o.ü}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sy(s) - y(0) = sy(s)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 2y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$s^2y(s) - 1 - 2s\,y(s) + 2y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$y(s)\,(s^2 - 2s + 2) = \frac{1}{s+1} + 1$$

$$y(s) = \frac{1}{(s+1)((s-1)^2+1)} + \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

Şimdi de $y(s)$ nin ters laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$= e^{-t} * e^{t}\sin t + e^{t}\sin t$$

$$= \int_0^t e^{-t+\tau}\cdot e^{\tau}\sin\tau\, d\tau + e^{t}\sin t$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau + e^{t}\sin t$$

$$\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{e^{2\tau}}{2}\cdot\sin\tau\Big|_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}\cos\tau\, d\tau = \frac{e^{2t}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\cos\tau\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau\right]$$

$e^{2\tau}d\tau = dv \qquad \sin\tau = u$

$\frac{e^{2\tau}}{2} = v \qquad \cos\tau\, d\tau = du$

$e^{2\tau}d\tau = dv \qquad \cos\tau = u$

$\frac{e^{2\tau}}{2} = v \qquad -\sin\tau\, d\tau = du$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\,\frac{e^{2t}}{2}\cos t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau$$

$$\therefore\ \frac{5}{4}\int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{e^{2t}\sin t}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2t}\cos t}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{2\tau}\sin\tau\, d\tau = \frac{2}{5}e^{2t}\sin t - \frac{1}{5}e^{2t}\cos t + \frac{1}{5}$$

Sonuç olarak

$$y(t) = e^{-t}\left[\frac{2}{5}e^{2t}\sin t - \frac{1}{5}e^{2t}\cos t + \frac{1}{5}\right] + e^{t}\sin t$$

$$= \frac{2}{5}e^{t}\sin t - \frac{1}{5}e^{t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-t} + e^{t}\sin t$$

$$= \frac{7}{5}e^{t}\sin t - \frac{1}{5}e^{t}\cos t + \frac{1}{5}e^{-t}$$

3) $x_1' = 9x_1 + 5x_2$ **sisteminin genel çözümünü özdeğer metodu ile çözünüz. (20 puan)**
$x_2' = -6x_1 - 2x_2$

Çözüm: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Öncelikle özdeğerleri bulalım:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & 5 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -18 - 9\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 30 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 4$$

* $\lambda_1 = 3$ için özvektör bulalım:

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a_1 = -5b_1 \\ a_1 = -5 \text{ seçilirse} \\ b_1 = 6 \text{ olur} \end{array}\right\} v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

* $\lambda_2 = 4$ için özvektör bulalım:

$$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5a_2 = -5b_2 \\ a_2 = 1 \text{ seçilirse} \\ b_2 = -1 \text{ olur} \end{array}\right\} v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Genel çözüm: $X(t) = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t}$

4) $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$ **diferensiyel denkleminin Frobenius seri çözümlerini bulunuz. (20 puan)**

Çözüm: Öncelikle $P(x)$ ve $Q(x)$ i yazalım:

$$y'' + \frac{1-2x^2}{2x}y' - \frac{4x}{2x}y = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{1-2x^2}{2x} \text{ ve } Q(x) = -2$$

Şimdi de $p(x)$ ve $q(x)$ i bulalım.

$$p(x) = x.P(x) = \frac{1-2x^2}{2}, \quad q(x) = x^2 Q(x) = -2x^2$$

$\therefore\ p(0) = \frac{1}{2}, \quad q(0) = 0$

indisel denklem: $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$$r(r-1) + \frac{r}{2} = 0$$

$$r^2 - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

$r_2 - r_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ old. dan iki lineer bağımsız Frobenius seri çözümünün varlığı garantidir.

Şimdi; $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ frobenius seri çözümünü ele alalım:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

y, y' ve y'' denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+r+1} = 0$$

3. ve 4. toplamlarda indis kaydıralım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2}(n-2+r)x^{n+r-1} - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2}x^{n+r-1} = 0$$

Burada $n=0$ ve $n=1$ durumları ayrı ayrı incelenmeli.

$n=0$ için $2a_0 r(r-1) + a_0 r = 0 \Rightarrow a_0(2r^2 - r) = 0$

r_1 ve r_2 için

$2r^2 - r = 0$ old. dan a_0 keyfi sabittir.

$n=1$ için;

$$2a_1(r+1)r + a_1(r+1) = 0 \Rightarrow a_1(2r^2+3r+1)=0$$

r_1 ve r_2 için

$2r^2+3r+1 \neq 0 \Rightarrow a_1=0$

$n \geq 2$ için indisel denklemi elde edelim.

$$2a_n(n+r)(n+r-1) + a_n(n+r) - 2a_{n-2}(n-2+r) - 4a_{n-2} = 0$$

$$a_n = \frac{a_{n-2}(2n-4+2r+4)}{2(n+r)(n+r-1+\frac{1}{2})} = \frac{a_{n-2}(2n+2r)}{2(n+r)(n+r-\frac{1}{2})} = \frac{a_{n-2}}{n+r-\frac{1}{2}}$$

* 1. Durum : $r=0$ ve $a_n=b_n$ olsun.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad , \quad b_n = \frac{b_{n-2}}{n+0-\frac{1}{2}} = \frac{b_{n-2}}{n-\frac{1}{2}}$$

$n=2$ için $b_2 = \frac{2b_0}{3}$ $\qquad$ $n=3$ için $b_3 = \frac{2b_1}{5} = 0$

$n=4$ için $b_4 = \frac{2b_2}{7} = \frac{2^2 b_0}{7.3}$ $\qquad$ n tek iken $b_n=0$

$n=6$ için $b_6 = \frac{2b_4}{11} = \frac{2^3 b_0}{11.7.3}$

$$\therefore y(x) = b_0\left(1 + \frac{2^1}{3}x^2 + \frac{2^2}{7.3}x^4 + \frac{2^3}{11.7.3}x^6 + \cdots\right)$$

* 2. Durum : $r=\frac{1}{2}$ ve $a_n=c_n$ olsun

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}} \qquad c_n = \frac{c_{n-2}}{n}$$

n tek $\Rightarrow c_n=0$

$n=2$ iken $c_2 = \frac{c_0}{2}$

$n=4$ iken $c_4 = \frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2^3}$

$n=6$ iken $c_6 = \frac{c_4}{6} = \frac{c_0}{6.4.2}$

$$\therefore y(x) = c_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2^3}x^4 + \frac{1}{6.4.2}x^6 + \cdots\right)$$

5) $f(t) = \begin{cases} 0, \cancel{0}^{-3} < t < -1; \\ 1, -1 < t < \cancel{2}^{1}; \\ 0, \cancel{2}^{1} < t < 3 \end{cases}$ fonksiyonun Fourier serisini bulunuz. **(20 puan)**

Çözüm: Fonksiyonun periyodu 6 dır $\Rightarrow$ $2L = 6$ ve $L = 3$ dir.

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} + a_n \cos\frac{n\pi t}{L}$$

Burada $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dt = \frac{1}{3}t\Big|_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\sin\frac{n\pi t}{3}\,dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{3}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$\therefore$ $f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi t}{3}$ elde edilir.

SINAV SÜRESİ 100(YÜZ) DAKİKADIR.

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, YAZ DÖNEMİ
MAT 202, DİFERANSİYEL DENKLEMLER
GÜZ DÖNEMİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI
08 AĞUSTOS 2012

Adı Soyadı: İMZA:

1.	2.	3.	4.	5.	TOPLAM

— CEVAP ANAHTARI —

AÇIKLAMA: 1. Toplam 5 soru cevaplandırırsanız her bir soru 20 puan üzerinden değerlendirilecektir.

2. Toplam 4 soru cevaplandırırsanız her bir soru 25 puan üzerinden değerlendirilecektir.

3. Sınav süresi 75 dakikadır.

Başarılar.

1. $(\cos x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^y)dy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ dif. denkleminin tam olması için gerek ve yeter şart; $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olmasıdır.

5

O halde; $M(x,y) = \cos x + \ln y$ ve $N(x,y) = \frac{x}{y} + e^y$ o.ü;

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$ olduğundan verilen dif. denklem tamdır.

5

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ 'nin x 'e göre integralini alırsak;

$F(x,y) = \int(\cos x + \ln y)\,dx \Rightarrow F(x,y) = \sin x + x\ln y + g(y)$.

5

$F(x,y)$ nin y 'ye göre türevini alalım;

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow \frac{x}{y} + g'(y) = \frac{x}{y} + e^y$ dir.

O halde $g'(y) = e^y \Rightarrow g(y) = e^y + c$ bulunur.

5

$$\boxed{\therefore\ F(x,y) = \sin x + x\ln y + e^y + c}$$

4 (Devam)

$r_1 = 0$ için

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2n(n-1)-n} \Rightarrow \quad n=1 \text{ için } \quad a_1 = \frac{a_0}{-1} = -a_0$$

$n=2$ için $\quad a_2 = \frac{a_1}{4-2} = \frac{-a_0}{2}$

$n=3$ için $\quad a_3 = \frac{a_2}{9} = \frac{-a_0}{18}$

$n=4$ için $\quad a_4 = \frac{a_3}{20} = \frac{-a_0}{20.18}$

5

$a_0 = 1$ alınırsa

$\therefore \quad a_n = \frac{1}{n!\,(2n-3)!!}$, $n \geq 2$ elde edilir.

$$y_1 = 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(2n-3)!!}$$

$r_2 = \frac{3}{2}$ için

$$y_2 = x^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{2(n+\frac{3}{2})(n+\frac{3}{2}-1)-(n+\frac{3}{2})} \Rightarrow \quad n=1 \text{ için } \quad b_1 = \frac{b_0}{5}$$

$n=2$ için $\quad b_2 = \frac{b_1}{14} = \frac{b_0}{7.5.2}$

5

$n=3$ için $\quad b_3 = \frac{b_2}{9.3} = \frac{b_0}{3.2.9.7.5}$

$b_0 = 1$ alınırsa

$\therefore \quad b_n = \frac{3}{n!\,(2n+3)!!}$, $n \geq 1$ elde edilir.

$$y_2 = x^{3/2}\left(1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(2n+3)!!}\right)$$

2. $y^{(3)} + y' + 2y = 2 - \sin x$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Öncelikle homojen kısmın çözümünü bulalım.

$$y^{(3)} + y' + 2y = 0$$

$r^3 + r + 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri:

$r_1 = -1$ kar. denk. bir köküdür.

$$\begin{array}{l|l} r^3 + r + 2 & r+1 \\ \underline{-\ r^3 + r^2} & r^2 - r + 2 \\ -r^2 + r + 2 & \\ \underline{-\ -r^2 - r} & \\ 2r + 2 & \\ \underline{-\ 2r+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow r^3 + r + 2 = (r+1)(r^2 - r + 2)$$

$$r_1 = -1 \quad r_{2,3} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{7}\, i$$

O halde tamamlayıcı fonksiyon: $y_c(x) = c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\ c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)$

$f(x) = 2 - \sin x$ ve türevleri : 1, $\sin x$, $\cos x$ dir. Bunların hiçbiri y_c içinde olmadığından;

$$y_p = A + B\sin x + C\cos x$$

$$\left.\begin{aligned} y_p' &= B\cos x - C\sin x \\ y_p'' &= -B\sin x - C\cos x \\ y_p''' &= -B\cos x + C\sin x \end{aligned}\right\} \quad y_p,\ y_p' \text{ ve } y_p''' \text{ denklemde yerine koyalım.}$$

$$-\cancel{B\cos x} + \cancel{C\sin x} + \cancel{B\cos x} - \cancel{C\sin x} + 2A + 2B\sin x + 2C\cos x = 2 - \sin x$$

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1$$
$$2C = 0 \Rightarrow C = 0$$
$$2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

O halde; $y_p = 1 - \frac{1}{2}\sin x$ dir.

Genel çözüm $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin x + c_1 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right) \text{ dir.}$$

10

10

5

3.

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 4x_2 \\ x_2' &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Verilen sistemi $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ o.ü;

$X' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} X$ şeklinde yazabiliriz. 5

10

Öncelikle özdeğer metodu ile çözümünü bulalım;

$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-20=0$

$\lambda^2-3\lambda-18=0$

$(\lambda-6)(\lambda+3)=0$

$\lambda_1=6 \quad \lambda_2=-3$ bulunur.

Şimdi de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

5

$\lambda_1=6$ için, $(A-\lambda_1 I)V=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0$

$-4v_1+4v_2=0$

$5v_1-5v_2=0 \Rightarrow V=k\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

5

$\lambda_2=-3$ için, $(A-\lambda_2 I)w=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}=0$

$5w_1+4w_2=0$

$5w_1+4w_2=0 \Rightarrow w=m\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

5' $X_c=c_1\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}e^{6t}+c_2\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}e^{-3t}$ dir

$\frac{x_1'-2x_1}{4}=x_2$

$\frac{6c_1e^{6x}-3c_2e^{-3x}}{4}-\frac{c_1e^{6x}}{2}-\frac{c_1e}{2}$

$x_2'=\frac{x_1''}{4}-\frac{x_1'}{2}=\frac{10x_1}{2}+\frac{x_1'}{4}-\frac{2x_1}{x_{12}}$

$\frac{x_1''}{4}-\frac{3x_1'}{4}-\frac{9x_1}{2}$

$x_1''-3x'-18x_1=0$

$r^2-3r-18=0$

4. $2xy'' - y' - y = 0$ diferensiyel denkleminin iki lineer bağımsız Frobenius seri çözümünü bulunuz.

$$y'' - \frac{1}{2x} y' - \frac{1}{2x} y = 0 \quad , \quad x=0 \text{ düzgün tekil noktadır.}$$

5

Burada $p(x) = -\frac{1}{2}$ $\quad q(x) = -\frac{x}{2}$ dir. O halde $p(0) = -\frac{1}{2}$ ve $q(0) = 0$ 'dır.

indisel denklem: $r(r-1) - \frac{1}{2} r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = \frac{3}{2}$

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

5

y'', y' ve y denklemde yerine koyulursa;

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

3. toplamda indis kaydırma işlemi yapalım;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r-1} = 0 \quad (*)$$

5

Bu toplamın ortak mertebesi $n \geq 1$ dir. $n=0$ için ayrı inceleyelim.

$n=0$ için $\quad 2r(r-1) c_0 - r c_0 = 0 \Rightarrow (2r^2 - 3r) c_0 = 0$

r_1, r_2 için $2r^2 - 3r \neq 0$ dır.

$\therefore$ $c_0 = 0$ olmak zorunda değil!

(*) eşitliğinden x^{n+r-1} in katsayısı;

$$2(n+r)(n+r-1) c_n - (n+r) c_n - c_{n-1} = 0$$

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1) - (n+r)} \quad \text{dir.}$$

5. $x^2y' = xy + x^2e^{y/x}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5

Öncelikle eşitliğin her iki tarafını x^2 ile bölelim:

$$y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

5

$\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapalım: $y = ux$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

10

$$\therefore \cancel{u} + x\frac{du}{dx} = \cancel{u} + e^u$$

$x\frac{du}{dx} = e^u$ ayrılabilir dif. denklemdir.

$$\int \frac{du}{e^u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-u} = \ln x + c$$

$$e^{-u} = -\ln x + c$$

$$-u = \ln(-\ln x + c)$$

$$u = -\ln(-\ln x + c)$$

5

$\frac{y}{x} = u$ denklemde yerine yazılırsa;

$\frac{y}{x} = -\ln(-\ln x) \Rightarrow y = -x\ln(-\ln x + c)$ bulunur.