Mat 202 - Diferensiyel Denklemler

I. Uygulama

1) (a) ve (b) şıklarında $y(x)$ in verilen diferensiyel denklemi sağladığını gösteriniz ve $y(x)$ verilen başlangıç koşulunu sağlayacak şekilde bir C sabiti bulunuz.

a) $e^y y' = 1$; $y(x) = \ln(x+C)$, $y(0)=0$

b) $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x^5$, $y(x) = \frac{1}{4}x^5 + Cx^{-3}$, $y(2)=1$

Çözüm: a) $y'(x) = \dfrac{1}{x+C}$

$$e^y y' = e^{\ln(x+c)}\frac{1}{x+C} = (x+c).\frac{1}{x+c} = 1;$$ $y(x)$ dif. denk sağlar.

$$y(0) = \ln(0+c) = 0 \Rightarrow \ln(c) = 0 \Rightarrow C = 1$$

BDP nin çözümü $y(x) = \ln(x+1)$

b) $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5}{4}x^4 - 3c\, x^{-4}$

$$x.\frac{dy}{dx} + 3y = x.\frac{5}{4}x^4 - \cancel{3cx^{-4}.x} + \frac{3}{4}x^5 + \cancel{3cx^{-3}} = 2x^5,$$ $y(x)$ dif. denk sağlar

$$y(2) = \frac{1}{4}2^5 + C.2^{-3} = 1 \Rightarrow 8 + \frac{c}{8} = 1 \Rightarrow C = -56$$

BDP'nin çözümü $y(x) = \frac{1}{4}x^5 - 56x^{-3}$

2) Aşağıda tanımlanmış olayların bir matematiksel modeli olan dif. denk. yazınız.

a) Bir lamborghini'nin $\dfrac{dv}{dt}$ ivmesi, 250 km/s ve arabanın hızı arasındaki farka orantılıdır.

b) P nüfuslu bir şehirde, bir bulaşıcı hastalığa yakalanmış bireylerin sayısının (N) zamana oranı, hastalığa yakalanmış olanların sayısı ile yakalanmamış olanların sayısının çarpımı ile orantılıdır.

Çözüm: a) $\frac{dV}{dt} = 250 - V$

b) Hastalığa yakalananların sayısı: N
Hastalığa yakalanmayanların sayısı: $P-N$

$$\underbrace{\frac{dN}{dt}}_{\text{Hastalığa yakalananların zamana oranı}} = N.(P-N)$$

3) Aşağıda verilen dif. denk. ve BDP'ni çözünüz.

a) $y' = 1+x+y+xy$

b) $2y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$, $y(5)=2$

c) $xy' + (2x-3)y = 4x^4$

d) $2x\frac{dy}{dx} = y + 2x\cos x$, $y(1)=0$

Çözüm: a) Ayrılabilir dif. denk.

$y' = (1+x) + y(1+x) = (1+x)(1+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow e^{\ln(1+y)} = e^{x+\frac{x^2}{2}+C}$$

$$\Rightarrow y = e^{x+\frac{x^2}{2}+C} - 1$$

b) $2y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$ (Ayrılabilir dif. denk)

$\int 2y\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\,dx \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \Rightarrow y^2 = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2-16} + C$

$u = x^2-16$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

$4 = \sqrt{25-16} + C \Rightarrow C = 1$

BDP'nin çözümü

$y^2 = \sqrt{x^2-16} + 1$

c) $xy' + (2x-3)y = 4x^4$

$$y' + \underbrace{\frac{2x-3}{x}}_{P(x)} y = \underbrace{4x^3}_{Q(x)}$$ lineer dif. denk

$$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \rho(x) = e^{\int (2-\frac{3}{x})dx}$$
$$= e^{2x - 3\ln x}$$

Her tarafı $\rho(x)$ ile çarpalım;

$$e^{2x-3\ln x} y' + \frac{2x-3}{x} e^{2x-3\ln x} y = e^{2x-3\ln x} \cdot 4x^3$$

$$\left(e^{2x-3\ln x} \cdot y\right)' = e^{2x-3\ln x} \cdot 4x^3$$

her iki tarafın $\Rightarrow$ integralini alalım

$$e^{2x-3\ln x} \cdot y = \int \left(e^{2x} \cdot \frac{1}{x^3} 4x^3\right) dx = \int 4e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2x}}{x^3} y = 2e^{2x} + C$$

$$\Rightarrow y = x^3(2 + Ce^{-2x})$$

d) $2x \frac{dy}{dx} - y = 2x\cos x \quad , \quad y(1)=0$

$$\rho(x) = e^{\int P(t)dt}$$

$x \neq 0$;

$$\frac{dy}{dx} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{P(x)} y = \underbrace{\cos x}_{Q(x)} \Rightarrow \rho(x) = e^{\int -\frac{1}{2x}dx}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} y = x^{-\frac{1}{2}} \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}} y\right) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x \, dx \Rightarrow$$ Her iki tarafın $\int_{x_0}^{x}$ integralini alalım

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{2}} y\right) = \int_{x_0}^{x} t^{-\frac{1}{2}} \cos t \, dt$$

$$x^{-\frac{1}{2}} y - \underbrace{x_0^{-\frac{1}{2}} y(x_0)}_{0} = \int_{x_0}^{x} t^{-\frac{1}{2}} \cos t \, dt \Rightarrow y = \sqrt{x} \int_{x_0}^{x} t^{-\frac{1}{2}} \cos t \, dt$$

4) Aşağıdaki dif denk genel çözümlerini bulunuz.

a) $y' = (4x+y)^2$

b) $\left(x^3 + \frac{y}{x}\right)dx + (y^2 + \ln x)\,dy = 0$

c) $xyy' = y^2 + x\sqrt{4x^2+y^2}$

d) $x^2y' + 2xy = 5y^4$

e) $3x + y^4x' = 2yx$

(x bağımlı, y bağımsız değişken)

Çözüm: a) $v = 4x+y$ olsun

$$y = v - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 4 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} + 4 = v^2 + 4$$

Ayrılabilir dif denk.

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v^2+4} = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{v}{2} = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{(4x+y)}{2}\right) = x + C$$

b) $\underbrace{\left(x^3 + \frac{y}{x}\right)}_{M}dx + \underbrace{(y^2 + \ln x)}_{N}dy \Rightarrow M_y = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = N_x$

o halde dif denk tamdır

$$F(x,y) = \int M\,dx = \int \left(x^3 + \frac{y}{x}\right)dx = \frac{x^4}{4} + y\ln(x) + g(y)$$

$$F_y(x,y) = \cancel{\ln(x)} + g'(y) = y^2 + \cancel{\ln(x)} \Rightarrow g'(y) = y^2$$

$$\Rightarrow g(y) = \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + C$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + y\ln(x) + \frac{y^3}{3} + C$$

c) $y' = \frac{y^2}{xy} + \frac{x}{xy}\sqrt{4x^2+y^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{4x^2}{y^2}+1}$

$= \frac{y}{x} + \sqrt{\left(2\frac{x}{y}\right)^2+1}$

Homojen Denklem

$\frac{y}{x} = v$ olsun $\quad y = vx$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - v = v + \sqrt{\left(2\frac{1}{v}\right)^2+1} - v$

$= \sqrt{\frac{4}{v^2}+1}$

Ayrılabilir dif. denk.

$\int \frac{dv}{\sqrt{\frac{4}{v^2}+1}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{v\,dv}{\sqrt{v^2+4}} = \int \frac{dx}{x}$

$\sqrt{v^2+4} = \ln|x| + c$

Genel çözüm $\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+4} = \ln|x| + c$

d) $y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{5}{x^2}}_{Q(x)}y^4$, $n=4$

Bernoulli Denklemi $\left(y' + P(x)y = Q(x)y^n\right)$

$v = y^{1-4} = y^{-3} \Rightarrow y = v^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3}v^{-\frac{4}{3}}\frac{dv}{dx} \Rightarrow -\frac{1}{3}v^{-\frac{4}{3}}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{x^2}v^{-\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{6}{x}v = \frac{5}{x^2}$ her tarafı x^{-6} ile çarpalım

$x^{-6}\frac{dv}{dx} - 6x^{-7}v = 5x^{-8}$

$\frac{d}{dx}(x^{-6}v) = 5x^{-8} \Rightarrow x^{-6}v = \int 5x^{-8}dx \Rightarrow x^{-6}v = \frac{-5}{7}x^{-7} + C$

$\Rightarrow v = \frac{-5}{7}x^{-1} + Cx^6 \Rightarrow y^{-3} = \frac{-5}{7}x^{-1} + Cx^6$

e) $y^4 x' = 2yx - 3x$

$= x(2y-3)$

$\frac{dx}{dy} y^4 = x(2y-3)$ (Ayrılabilir dif. denk)

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2y-3}{y^4} dy$$

$$\ln(x) = \int (2y^{-3} - 3y^{-4}) dy = 2 \frac{y^{-2}}{-2} - 3 \frac{y^{-3}}{-3} + c$$

$$\ln(x) = -y^{-2} + y^{-3} + C$$

$$x = e^{-y^{-2} + y^{-3}} \cdot e^{c}$$

Soru 5) a) $\frac{dy}{dx} = A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x)$ denklemine Riccati denklemi denir. Bu denklemin bir $y_1(x)$ özel çözümünün bilindiğini varsayalım. Gösteriniz ki;

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

konumu Riccati denklemini

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)\,v = -A$$ lineer denklemine dönüştürür.

b) Bir özel çözümü $y_1(x) = x$ olan aş. dif. denk çözmek için a şıkkındaki yöntemi kullanınız. $\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 + x^2$

Çözüm: a) $y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y_1' - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

$$y_1' - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = A(x)\left(y_1^2 + \frac{1}{v^2} + 2\frac{y_1}{v}\right) + B(x)\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + C(x)$$

$$\cancel{A(x)y_1^2} + \cancel{B(x)y_1} + \cancel{C(x)} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{A(x)y_1^2} + A(x)\cdot\frac{1}{v^2} + 2A(x)\frac{y_1}{v} + \cancel{B(x)y_1} + \frac{B(x)}{v} + \cancel{C(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -A(x) - 2A(x)\,y_1 v + B(x)\,v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + (B(x) + 2A(x)y_1)v = -A(x)$$

b) $\frac{dy}{dx} = -y^2 + 1 + x^2$

$A(x) = -1$
$B(x) = 0$
$C(x) = 1 + x^2$
$y_1(x) = x$

$\Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{v}$ o.ü Riccati denklemi

$$\frac{dv}{dx} \underbrace{-2x}_{P(x)} v = \underbrace{-2}_{Q(x)}$$ lin. denk. dönüşür.

$$p = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

Her tarafı p ile çarpalım.

$$e^{-x^2}\frac{dv}{dx} - 2xe^{-x^2}v = 2e^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}v\right)' = \int 2e^{-x^2}dx \Rightarrow e^{-x^2}v = \int 2e^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow v = e^{x^2}\int 2e^{-x^2}dx$$

Dif. Denk genel çözümü: $y = x + \left(e^{x^2}\int 2e^{-x^2}dx\right)^{-1}$

Soru 6) a) $y = xy' + g(y')$ ...(1) biçimindeki denkleme Clairaut denklemi denir. Gösteriniz ki;

$$y(x) = Cx + g(C)$$

ile tanımlanan bir parametreli doğru ailesi (1) denkleminin genel çözümüdür.

b) (1) denkleminde $g(y') = -\frac{1}{4}(y')^2$ olan

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

Clairaut denklemini göz önüne alalım. Gösteriniz ki

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2$$

doğrusu $\left(\frac{1}{2}C, \frac{1}{4}C^2\right)$ noktasında $y = x^2$ parabolüne teğettir. Bunun, neden $y = x^2$'nin, verilen Clairaut denkleminin bir aykırı çözümü olmasını gerektirdiğini açıklayınız.

a) $y(x) = Cx + g(C)$ sürekli ve 1. mertebeden türevi mevcut.

$y'(x) = C$ 'dir

$y = xy' + g(y') \Rightarrow Cx + g(C) = xC + g(C)$ yani $y'(x)$ (1) denklemini sağlar.

Farklı C sabitleri için (1) denkleminin farklı çözümleri elde edilir. O halde $y(x) = Cx + g(C)$ (1) denk. genel çözümüdür.

b) $y(x) = Cx + \frac{1}{4}C^2 \Rightarrow y'(x) = C$ 'dir.

$$y'\left(\tfrac{1}{2}C\right) = C$$

$y(x) = x^2 \Rightarrow y'(x) = 2x \Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}C\right) = C$

$y(x) = Cx + \frac{1}{4}C^2$ ve $y(x) = x^2$ $\left(\frac{1}{2}C, \frac{1}{4}C^2\right)$ noktasındaki eğimleri aynı olduğundan, birbirine teğettirler.

$y = x^2$ parabolü $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ denklemi sağlar. Fakat $y = x^2$ $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ genel çözümü ile elde edilemez.

Mat 202 II. Uygulama

Soru 1) Aşağıda verilen denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

a) $y'' - 6y + 13y = 0$

b) $y^{(3)} + 3y'' + 4y' - 8y = 0$

Çözüm: a) Karasteristik denklem

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4.13 = -16 \qquad r_{1,2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

Kökler kömleks: genel çözüm $e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$ olur

$$y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

b) Karakteristik denklem:

$$r^3 + 3r^2 + 4r - 8 = 0$$

$r = 1$ denklemin bir kökü $\Rightarrow$ $(r-1)$ bir çarpan

$$\begin{array}{l|l} r^3 + 3r^2 + 4r - 8 & r-1 \\ \underline{-\ r^3 - r^2} & \overline{r^2 + 4r + 8} \\ \quad 4r^2 + 4r & \\ \quad \underline{-\ 4r^2 - 4r} & \\ \qquad 8r - 8 & \\ \qquad \underline{-\ 8r - 8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$r^3 + 3r^2 + 4r - 8 = (r-1)(r^2 + 4r + 8) \Rightarrow$ $r_1 = 1$

$$r_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = -2 \pm 2i$$

$$y(x) = c_1 e^x + e^{-2x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$$

Soru2) $y'' + 2y' + 5y = e^x \sin x$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $r^2+2r+5=0$ karakteristik denklemin kökleri:

$\Delta = 4-4.5=-16 \Rightarrow r_{1,2} = \dfrac{-2\pm 4i}{2} = -1\pm 2i$

O halde $y_c(x) = e^{-1.x}(c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x)$

Denk. sağ tarafının türevleri:

$e^x \sin x \quad e^x \cos x$ terimlerinden oluşur

Bu terimlerin hiçbiri $y_c(x)$ 'in terimleri aynı değil.

O halde; $y_p(x) = A e^x \sin x + B e^x \cos x$ şeklinde alınır

$y_p'(x) = Ae^x\sin x + Ae^x\cos x + Be^x\cos x - Be^x\sin x$

$y_p''(x) = Ae^x\sin x + Ae^x\cos x + Ae^x\cos x - Ae^x\sin x$
$\quad + Be^x\cos x - Be^x\sin x - Be^x\sin x - Be^x\cos x$

Denklemde yerine koyalım.

$4Ae^x\cos x - 4Be^x\sin x + 2Ae^x\sin x + 2Be^x\cos x + 5Ae^x\sin x + 5Be^x\cos x = e^x\sin x$

$4/\ 4A+7B=0$
$7/\ -4B+7A=1$ $\Rightarrow (16+49)A=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{65}$

$B = -\dfrac{4}{65.7}$

$y_p(x) = \dfrac{1}{65}e^x\sin x - \dfrac{4}{65.7}e^x\cos x$

Soru3) $y^{(3)} + y'' = x + e^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$ BDP 'ni çözünüz.

$r^3+r^2=0$ karakteristik denklemin kökleri

$r^2(r+1)=0$ $\quad r=0$ (çift katlı) $\quad r=-1$ 'dir

O halde $y_c(x) = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3e^{-x}$
$= c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$

Denklemin sağ tarafının türevleri $1, x, e^{-x}$ dir.

$$y_p(x) = A + Bx + Ce^{-x} \text{ yazılabilir.}$$

Fakat $y_c(x)$ x ve e^{-x} terimlerini içerdiğinden $y_p(x)$ $(A+Bx)$'i x^2 ile (Ce^{-x})'i x ile çarpalım.

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cxe^{-x}$$

$$y_p'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + Ce^{-x} - Cxe^{-x}$$

$$y_p''(x) = 2A + 6Bx - 2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$$

$$y_p'''(x) = 6B + 2Ce^{-x} - Ce^{-x} - Cxe^{-x}$$

$$y_p^{(3)}(x) + y_p''(x) = 2A + 6Bx + 6B - Ce^{-x} = x + e^{-x}$$

$$\begin{array}{lll} 6B = 1 & & B = \frac{1}{6} \\ -C = 1 & \Rightarrow & C = -1 \\ 2A + 6B = 0 & & A = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - xe^{-x}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - xe^{-x}$$

$$y'(x) = c_2 - c_3 e^{-x} - x + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$y''(x) = c_3 e^{-x} - 1 + x + e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad y''(0) = c_3 - 1 + 1 + 1 = c_3 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0$$

$$y'(0) = c_2 - c_3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1$$

$$y(0) = c_1 + c_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = +1$$

$$y(x) = +1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - xe^{-x}$$

Soru4) $y'' + 4y = \sin^2 x$ denkleminin parametrelerin değişimi yöntemini kullanarak özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: 1. yol $r^2+4=0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$r^2=-4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$$

$\therefore$ $y_c(x) = e^{0.x}(c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x) = c_1 \underbrace{\cos x}_{y_1(x)} + c_2 \underbrace{\sin x}_{y_2(x)}$ 'dir.

$y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x) \sin x$ o.ş $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonk. bulmak istiyoruz.

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$$
sistemini çözmeliyiz

$$\sin x / \quad u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$$
$$\cos x / \ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \sin^2 x$$

$$u_2' \sin^2 x = 0$$
$$u_2' \cos^2 x = \cos x \sin^2 x$$
$$\Rightarrow \quad u_2' = \cos x \sin^2 x$$
$$u_1' = -\sin^3 x$$

$u_1 = \int -\sin^3 x \, dx$ $\left(\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} du\right)$

$$u_1 = -\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x \, dx\right) = \frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\cos x$$

$$u_2 = \int \cos x \sin^2 x \, dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$\sin x = u$
$\cos x dx = du$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\cos x\right)\cos x + \frac{\sin^4 x}{3}$$

2. yol $y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\,f(x)}{w(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\,f(x)}{w(x)}dx$

$$y_p(x) = -\cos x \underbrace{\int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx}_{I_1} + \sin x \underbrace{\int \cos x \sin^2 x \, dx}_{I_2}$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$I_1 = \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x$$

$$I_2 = \int \cos x \sin^2 x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3}$$

$\sin x = u$
$\cos x \, dx = du$

$$y_p(x) = -\cos x \left(-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x\right) + \sin x \cdot \frac{\sin^3 x}{3}$$

Euler Denklemi: $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ şeklinde tanımlanır.

Bu denklem $v = \ln x \ (x>0)$ dönüşümü ile

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0$$ sbt katsayılı lineer denklemine dönüşür.

$4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$ Euler denklemini çözünüz.

$v = \ln x \ (x>0)$ dönüşümü yaparsak;

$a = 4$
$b = 8$ o.ü. Euler denklemi
$c = -3$ $4y'' + 4y' - 3y = 0$ denklemine dönüşür

Karakteristik denklem: $4r^2 + 4r - 3 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y(v) = c_1 e^{\frac{1}{2}v} + c_2 e^{-\frac{3}{2}v} \Rightarrow y(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-3/2}$$

Soru: $(x^2+3)y''-7xy'+16y=0$ diferensiyel denkleminin x' in kuvvet serisi şeklindeki çözümünü bulunuz.

Çözüm: Öncelikle dif. denk $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ formunda yazalım:

$$y''-\frac{7x}{x^2+3}y'+\frac{16}{x^2+3}y=0$$

Burada $P(x)=-\frac{7x}{x^2+3}$ $Q(x)=\frac{16}{x^2+3}$ ve $x=0$ dif. denk adi noktasıdır.

O halde çözüm $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ formunda olmalı

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1} \qquad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$$

y, y' ve y'' denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty}3n(n-1)a_n x^{n-2}-7\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n+16\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

2. terimde indis kaydırılırsa;

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}3(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-7\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n+16\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

Bu toplamların genel dizilişi $n\geq 2$ dir. Bu neden $n=0$ ve $n=1$ ayrı incelenmeli

$n=0$ için $3.2.1.a_2+16a_0=0 \Rightarrow a_2=\frac{-16a_0}{2.3}$

$n=1$ için $3.3.2\,a_3x-7a_1x+16a_1x=0 \Rightarrow a_3=\frac{-a_1}{2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n+3(n+2)(n+1)a_{n+2}-7na_n+16a_n\right)x^n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{(-n^2+n+7n-16)a_n}{3(n+2)(n+1)}=\frac{-(n^2-8n+16)a_n}{3(n+2)(n+1)}=\frac{-(n-4)^2}{3(n+2)(n+1)}a_n$$

$n=4$ için $a_6=0$ olur.

$n\geq 4$ olduğunda n çift ise 0 olur.

$n=2$ için $a_4 = \dfrac{-(2-4)^2 a_2}{3.4.3} = -\dfrac{1}{9} a_2 = \dfrac{16}{9.2.3} a_0 = \dfrac{8}{27} a_0$

$n=3$ için $a_5 = \dfrac{-(3-4)^2 a_3}{3.5.4} = -\dfrac{1}{60} a_3 = \dfrac{1}{120} a_1$

$n=5$ için $a_7 = \dfrac{-(5-4)^2}{3.7.6} a_5 = \dfrac{-a_5}{7.6.3} = \dfrac{-1}{120.7.6.3} a_1$

$$\therefore\ y(x) = a_0\left(1+\left(-\frac{8x^2}{3}\right)+\frac{8x^2}{27}\right) + a_1\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{120.7.6.3}+\cdots\right)$$

Soru: $2x\, y'' + (x+1)y' + y = 0$ dif. denk frobenius seri çözümünü bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemi $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ formunda yazalım.

$$y'' + \frac{1+x}{2x} y' + \frac{1}{2x} y = 0$$

Burada $P(x) = \dfrac{x+1}{2x}$ ve $Q(x) = \dfrac{1}{2x}$ dir. $\therefore x=0$ dif. denk tekil noktasıdır.

$p(x) = xP(x) = \dfrac{x+1}{2}$ ve $q(x) = x^2 Q(x) = \dfrac{x}{2}$. dir. $\therefore$ $x=0$ dif. denk düzgün tekil noktasıdır.

$\therefore$ Çözüm $y(x) = x^r \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda olmalı.

İndisel denklem: $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \Rightarrow r(r-1) + \frac{1}{2}r = 0$

$r^2 - \frac{r}{2} = 0$

Burada $p_0 = p(0) = \dfrac{1}{2}$, $q_0 = q(0) = 0$

$r(r-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$

$r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ oldıdan, iki lin. bağımsız çözüm vardır

Genel olarak $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ çözümü ile işlem yapalım

ve daha sonra r değerlerini yerine yazalım

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n\, x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r-2}$$

y, y' ve y'' dif denk yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n\, x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n\, x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

3. ve 4. toplamda indis kaydıralım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n\, x^{n+r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)\, a_{n-1}\, x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{n+r-1} = 0$$

$n=0$ durumunu inceleyelim:

$$2r(r-1)\, a_0\, x^{r-1} + r\, a_0\, x^{r-1} = (2r^2 - r)\, a_0\, x^{r-1} = 0$$

Burada $r_1 = 0$ $r_2 = \frac{1}{2}$ için $2r^2 - r = 0$ olduğundan a_0 keyfi sabittir

x^{n+r-1} 1: terimin katsayısını inceleyelim

$$2(n+r)(n+r-1)\, a_n + (n+r)\, a_n + (n+r-1)\, a_{n-1} + a_{n-1} = 0$$

$$a_n = \frac{(n+r)\, a_{n-1}}{(n+r)\,(2(n+r)-1)} = \frac{-a_{n-1}}{2(n+r)-1}$$

* Durum 1: $r_1=0$ ve a_n yerine b_n yazalım.

$$b_n = \frac{-b_{n-1}}{2n-1} \quad \text{olur.}$$

$n=1$ için $\quad b_1 = \frac{-b_0}{1}$

$n=2$ için $\quad b_2 = \frac{b_1}{3} = \frac{+b_0}{3}$

$n=3$ için $\quad b_3 = \frac{b_2}{5} = \frac{-b_0}{5.3}$

⋮

$b_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} b_0$ elde edilir $b_0 = 1$ alınabilir $b_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}$ olur
$n \geq 1$ için

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} x^n$$

* Durum 2: $r_2 = \frac{1}{2}$ ve a_n yerine c_n alınırsa;

$$c_n = \frac{-c_{n-1}}{2n}$$

$n=1$ için $\quad c_1 = \frac{-c_0}{2}$

$n=2$ için $\quad c_2 = \frac{-c_1}{4} = \frac{c_0}{4.2}$

$n=3$ için $\quad c_3 = \frac{-c_2}{6} = \frac{-c_0}{6.4.2} = \frac{-c_0}{2^3 . 3!}$

$n=4$ için $\quad c_4 = \frac{-c_3}{8} = \frac{+c_0}{8.6.4.2} = \frac{+c_0}{2^4 . 4!}$

⋮

$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}$ olur. $c_0 = 1$ alınabilir $\Rightarrow$ $c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ olur.

$$y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n$$

Soru: $f(t) = \begin{cases} 0 & , -2 < t < 0 \\ t^2 & , 0 < t < 2 \end{cases}$

Yukarıda, periyodik $f(t)$ fonk. tam bir periyottaki değerleri verilmiştir. Fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: Fourier serisi;

$$f(t) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

Burada $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt \quad \text{dir.}$$

$L = 2$ dir.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} 0\, dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} t^2\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 0 \cdot \cos \frac{n\pi t}{2}\, dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} t^2 \cos \frac{n\pi t}{2}\, dt$$

$t^2 = u \qquad \cos \frac{n\pi t}{2}\, dt = dv$

$2t\, dt = du \qquad \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{2} = v$

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\left. t^2 \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{2} \right|_0^2}_{0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 2t \sin \frac{n\pi t}{2}\, dt \right] = -\frac{2}{n\pi} \left[\left. -\frac{2}{n\pi}\, t \cos \frac{n\pi t}{2} \right|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi t}{2}\, dt \right]$$

$t = u \qquad \sin \frac{n\pi t}{2}\, dt = dv$

$dt = du \qquad -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{2} = v$

$$a_n = \frac{8}{(n\pi)^2}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8\,(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \cancel{0.\sin\frac{n\pi t}{2}}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^2 t^2\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

0

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}t^2\cos\frac{n\pi t}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 2.t\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt\right]$$

$t^2 = u$ $\quad$ $\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = dv$

$2t\,dt = du$ $\quad$ $-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2} = v$

$$b_n = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 t\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n\pi}\left[\cancel{\frac{2}{n\pi}.t\sin\frac{n\pi t}{2}}\Bigg|_0^2 - \int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\right.$$

0

$t = u$ $\quad$ $\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt = dv$

$dt = du$ $\quad$ $\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2} = v$

$$b_n = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \left[\frac{8}{(n\pi)^3}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{8}{(n\pi)^3}(-1)^n - \frac{8}{(n\pi)^3}$$

$$= \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{8}{(n\pi)^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$f(t) \sim \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8\,(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi t}{2} + \left(\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{8}{(n\pi)^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin\frac{n\pi t}{2}\right\}$$