$y' = \tan((x+y-3)) - 1$

Birinci mertebeden diferansiyel denklemler:

1) Ayrılabilir dif. denk. $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) = \frac{g(x)}{f(y)}$

2) Lineer denklem: $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \Rightarrow \rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

3) Bernoulli denklemi: $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$

$v = y^{1-n}$

$\frac{dv}{dx} + (1-n)\,P(x)\,v = (1-n)\,Q(x)$

4) Homogen denklem: $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

5) Tam diferensiyel denklem $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ise denklem tamdır

6) Riccati denklemi: $\frac{dy}{dx} = A(x)\,y^2 + B(x)\,y + C(x)$

$y_1(x)$ denklemin bir özel çözümü olsun.

$y = y_1 + \frac{1}{v}$

$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)\,v = -A$

1) $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \overset{y(2x^2+1)}{2x^2y + y}$ $\qquad y(1)=1$

$$\frac{dy}{y} = (2x^2+1)\,x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \ln 1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + c$$

$$c = -1$$

$$\ln|y| = \frac{2}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} - 1$$

2) $(1+2xy)\frac{dy}{dx} = 1+y^2$ diferensiyel denklemini y yi bağımsız değişken alarak çözünüz.

Çözüm: $\frac{dx}{dy} = \frac{1+2xy}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} + x\frac{2y}{y^2+1}$

$$\frac{dx}{dy} - x\underbrace{\frac{2y}{y^2+1}}_{P(y)} = \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{Q(y)}$$

$$\rho(y) = e^{\int -\frac{2y}{y^2+1}dy} = e^{\int -\frac{du}{u}} = e^{-\ln|u|} = \frac{1}{|u|} = \frac{1}{y^2+1}$$

$y^2+1=u \Rightarrow 2y\,dy = du$

1. türev $\quad$ x 2 $\quad$ 2. sbt $\quad$ 2. türev

$$\frac{1}{y^2+1}\frac{dx}{dy} - x\frac{2y}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{(1+y^2)^2} \Rightarrow \int \frac{d}{dy}\left(x\cdot\frac{1}{y^2+1}\right)dy = \int \frac{1}{(1+y^2)^2}dy$$

$y = \tan u$ dönüşümü yapılırsa,
$u = \arctan y$

$dy = \sec^2 u\,du \Rightarrow$

$$\frac{x}{y^2+1} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{(\sec^2 u)^2} = \int \cos^2 u\,du$$

$$\frac{x}{y^2+1} = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2u)\,du = \frac{1}{4}\cos 2u + \frac{u}{2} + C$$

$$\frac{x}{y^2+1} = \frac{1}{4}(\cos \arctan y) + \frac{\arctan y}{2}.$$

3) $\frac{dy}{dx} + y = x y^3$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n \Rightarrow v = y^{1-n}$

$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$

Çözüm: Bernoulli denklemi $n = 3$

$v = y^{1-3} = y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa

$y = v^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} v^{-3/2} \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dx} + v^{-1/2} = x\, v^{-3/2} \quad \text{çarp } (-2 v^{3/2})$$

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x \quad \text{(Lineer denklem)}$$

$$\rho = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - e^{-2x}\, 2v = -2x e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x} v\right) = -2xe^{-2x}$$

$$e^{-2x} v = -2\int x e^{-2x}\, dx = -2\left[x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}\, dx\right]$$

$x = u$, $dx = du$ $\qquad e^{-2x} dx = dv$, $\frac{e^{-2x}}{-2} = v$

$$= xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{2} + C$$

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{+2x}$$

$v = y^{-2} \Rightarrow y^{-2} = x + \frac{1}{2} + ce^{-2x}$ bulunur.

$\int x^2, \; x^3/3$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$ $\quad y(1)=2 \quad$ BD.P ni Çözünüz

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\frac{y}{x}-3}{2-\frac{y}{x}}$

$\dfrac{y}{x} = u$ olsun $\Rightarrow$ $y = ux$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$

$$u + \frac{du}{dx}x = \frac{4u-3}{2-u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{4u-3-2u+u^2}{2-u}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2-u}{\underbrace{u^2+2u-3}_{(u+3)(u-1)}}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-1} = \frac{2-u}{(u+3)(u-1)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=-1 \\ -A+3B=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 4B=1 \\ B=\frac{1}{4} \\ A=-\frac{5}{4} \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{4}\int \frac{1}{u+3}\,du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}\,du = \ln|x| + C$$

$$-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{y}{x}+3\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \ln|x| + C$$

$-\frac{5}{4}\ln 5 = C$ olur

$$-\frac{5}{4}\ln\left|\frac{y}{x}+3\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \ln|x| - \frac{5}{4}\ln 5$$

5) $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ denkleminin bir özel çözümü

$y_1 = x$ ise genel çözümü bulunuz

$$y' = -y^2 + 2(x-1)y - x^2 + 2x + 1$$

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow y = x + \frac{1}{v}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$\cancel{1} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \cancel{-x^2} - \frac{1}{v^2} - \cancel{\frac{2x}{v}} + \cancel{2x^2} - \cancel{2x} + \cancel{\frac{2x}{v}} - \frac{2}{v} - \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{1}$$

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{v^2} - \frac{2}{v} \qquad (-v^2 \text{ ile çarpalım})$$

$$\frac{dv}{dx} = \underline{1 + 2v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} - 2v = 1 \qquad (\text{lineer denklem})$$

Ayrılabilir de olur.

$$p = e^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x} v\right) = e^{-2x}$$

$$e^{-2x} v = \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

$$v = -\frac{1}{2} + c\,e^{2x}$$

$$\therefore \quad y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{2x}}$$

b) $(xy^2+bx^2y)\,dx + (x+y)x^2\,dy = 0$ dif. denkleminin tam olması için b ne olmalıdır? Bulduğunuz b değeri için dif denk genel çözümünü bulunuz.

Çözüm $M(x,y) = (xy^2 + bx^2y)$

$N(x,y) = (x+y)x^2$

Dif denk tam olması için $M_y = N_x$ olmalı

$2xy + bx^2 = 3x^2 + 2xy \Rightarrow b=3$ olmalı

$F_x = xy^2 + 3x^2y$ ve $\underset{(*)}{F_y = (x+y)x^2}$ o.ş. F fonk bulacağız

$\Downarrow$

$F = \int (xy^2 + 3x^2y)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + g(y)$

$\Downarrow$

$F_y = x^2y + x^3 + g'(y) \overset{*\text{dan}}{=} x^3 + x^2y \Rightarrow g'(y) = 0$

$\Rightarrow g(y) = c$ (c sabit)

$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + x^3y + C$

- İkinci mertebeden diferensiyel denklemler (Sabit Katsayılı)

$ay'' + by' + cy = 0$

$ar^2 + br + c = 0$ karakteristik denklem

- 1. durum $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve $r_1 \neq r_2$ ise $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

2. durum $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve $r_1 = r_2 = r$ ise $y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

3. durum $r_{1,2} = a \pm ib$ ise $y(x) = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$

Yüksek mertebeden dif denklemler:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y + a_0 = 0$

$a_n r^n + a_{n-1} r^n + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ karakteristik denklem

1 durum $r_1, \ldots r_n \in \mathbb{R}$ ve $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \cdots \neq r_n$ ise

$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}$

2. durum $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ ve k katlı r kökü varsa;

$(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{rx} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \cdots c_n e^{r_n x}$

3. durum tekrarlı kompleks kök

k katlı $a \pm bi$ kökü varsa;

$\sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax} (c_i \cos bx + d_i \sin bx) + \cdots$

7) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ BDP ni çözünüz

Çözüm 1 Adım $y'' - 2y' + y = 0$ homojen denklemin çözümünü bulalım

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

$$y_h = c_1 e^t + c_1 t e^t .$$

2. Adım Özel çözüm adayı belirle

$$te^t \to te^t , \; e^t$$

$$4 \to 0$$

türev sonlu aile

belirsiz parametreler için test!

$$y_p = A + Be^t + C te^t$$

$$y_p = A + Bt^2e^t + Ct^3e^t$$

3. Adım y_p yi $y'' - 2y' + y = te^t + 4$ denkleminde yerine koy

$$y_p' = 2Bte^t + Bt^2e^t + 3Ct^2e^t + Ct^3e^t$$

$$y_p'' = 2Be^t + 2Bte^t + (B+3C)2te^t + (B+3C)t^2e^t + 3Ct^2e^t + Ct^3e^t$$

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = t^3e^t(C - 2C + C) + t^2e^t(3C - 6C + B + B + 3C - 2B)$$

$$te^t(2B + 6C - 4B + 2B) + 2Be^t + A = te^t + 4$$

$$A = 4 \qquad B = 0 \qquad C = \frac{1}{6}$$

$$y_p = 4 + \frac{1}{6} t^3 e^t$$

4. Adım $y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 te^t + 4 + \frac{1}{6} t^3 e^t$

B.K. yerine koyup c_1 ve c_2 yi bul

$$y(0) = c_1 + 4 = 1 \Rightarrow c_1 = -3$$

$$y' = c_1e^t + c_2te^t + c_2e^t + \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t \Rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 4$$

8) $y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$ dif denk genel çözümünü bulunuz (Özel çözümün sadece formatını yazınız)

Çözüm: $y''' - 4y' = 0$ denkleminin çözümünü bulalım

$r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = -2$

$y_h = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$

$t \to t \quad 0 \quad \to \underline{At+B}$

$\cos t \to \cos t \quad \sin t \to C\cos t + D\sin t$

$e^{-2t} \to e^{-2t} \quad \to Ee^{-2t}$

$At + B \;/\; + C\cos t + D\sin t + / Ete^{-2t}$

$y_p = \underline{At^2 + Bt} + C\cos t + D\sin t + Ete^{-2t}$

$At^2 + Bt$

$y = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t} + At^2 + Bt + C\cos t + D\sin t + Ete^{-2t}$

9) $(D^2 - 6D + 13)^2 (D+7)(D-1)^3 y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$(r^2 - 6r + 13)^2 (r+7).(r-1)^3 = 0$

$\frac{6 \mp \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$ çift katlı $\quad r = -7 \quad r = 1$ (3 katlı)

Karakteristik denklem

$(r^2 - 6r + 13)^2 (r+7)(r-1)^3 = 0$

$(r^2 - 6r + 13)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = 3 \pm 2i$ (çift katlı)

$r + 7 = 0 \Rightarrow r = -7$

$(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r = 1$ (3 katlı)

$y = e^{3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + te^{3t}(c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t)$
$+ c_5 e^{-7t} + c_6 e^{3t} + c_7 te^{3t} + c_8 t^2 e^{3t}$

10) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\sec t$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1. Adım homogen denklemin çözümünü bulalım.

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = -1 \pm i$$

$$W = \det\left|\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\right|$$

$$y_c = c_1 \underbrace{e^{-t}\cos t}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-t}\sin t}_{y_2}$$

parametrelerin değişimi yöntemi

I. yol

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ > Bunu nasıl seçtik

$$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

$\underline{u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0}$ (u_1'' ve u_2'' terimlerini elde etmemek için kabulümüz)

Bunu niye kabul ettik

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \Rightarrow y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

$$= u_1' y_1' + u_1(-2y_1' - 2y_1) + u_2' y_2' + u_2(-2y_2' - 2y_2)$$

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = u_1' y_1' - \cancel{2u_1 y_1'} - \cancel{2u_1 y_1} + u_2' y_2' - \cancel{2u_2 y_2'} - \cancel{2u_2 y_2}$$
$$+ \cancel{2u_1 y_1'} + \cancel{2u_2 y_2'} + \cancel{2u_1 y_1} + \cancel{2u_2 y_2} = e^{-t}\sec t$$

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = e^{-t}\sec t$$

$\Rightarrow$

$$e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t \,/\, u_1' \overbrace{(e^{-t}\cos t)}^{y_1} + u_2' \overbrace{e^{-t}\sin t}^{y_2} = 0$$

$$e^{-t}\cos t \,/\, u_1' \underbrace{(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)}_{y_1'} + u_2' \underbrace{(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)}_{y_2'} = e^{-t}\sin$$

$$u_2' \left(\cancel{e^{-2t}\cos t \sin t} + e^{-2t}\sin^2 t - \cancel{e^{-2t}\sin t\cos t} + e^{-2t}\cos^2 t \right)$$

$u_2' (e^{-2t} (\sin^2 + \cos^2))$

$$= e^{-2t} \sec t \cos t$$

$$\underline{u_2' = 1} \Rightarrow \int u_2' \, dt = \int dt \Rightarrow u_2 = t$$

$$u_1' = \tan t \Rightarrow u_1 = -\ln(\cos t)$$

$$y_p = -\ln\cos t \; e^{-t}\cos t + t \cdot e^{-t}\sin t$$

11) Her noktasındaki eğimi onoklanın apsisi ve ordinatı toplamına eşit olan ve $(0,3)$ noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x+y \Rightarrow y' - y = x \longrightarrow \text{Lineer Denklem}$$

$$p = e^{\int -1dx} = e^{-x}$$

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = xe^{-x}$$

$$\frac{d(ye^{-x})}{dx} = xe^{-x}$$

$$ye^{-x} = \int xe^{-x}dx$$

$$\frac{d}{dx}(y.e^{-x}) = xe^{-x}$$

$$ye^{-x} = \int xe^{-x}dx$$

$$x = u \qquad e^{-x}dx = dv$$

$$dx = du \qquad -e^{-x} = v$$

$$ye^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow y = -x - 1 + ce^{x}$$

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = -1 + c \Rightarrow c = 4$$

$$y = -x - 1 + 4e^{x}$$

12) $(x+y)y' = 1$ diferensiyel denklemini çözünüz

$$y' = \frac{1}{x+y}, \qquad x+y = u \text{ olsun}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u} \quad \text{(ayrılabilir dif denk)}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{u+1}du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{u+1-1}{u+1}du = \int dx$$

$$\Rightarrow u - \ln|u+1| = x + C$$

$$\Rightarrow x+y - \ln|x+y+1| = x + C \Rightarrow \boxed{y - \ln|x+y+1| = C}$$

1) $x^2y'' + 2xy' - 12y = x^3 + 4x$ diferensiyel denklemının genel Çözümünü bulunuz. (Özel çözüm için katsayı hesaplamayınız)

Not: Euler denklemi. $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$.

a, b, c sabit

Çözüm: $x>0$ o.ü $v = \ln x$ $(x = e^v)$ olsun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dv^2} \underbrace{\frac{dv}{dx}}_{=\frac{1}{x}} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dv}$$

$$x^2 \left(\frac{d^2y}{dv^2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dv} \right) + 2x \left(\frac{dy}{dv} \cdot \frac{1}{x} \right) - 12y = e^{3v} + 4e^v$$

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \frac{dy}{dv} - 12y = e^{3v} + 4e^v$$

$r^2 + r - 12 = 0 \Rightarrow r_1 = -4, \; r_2 = 3$ (Homojen kısmın çözümü)

$+4$
-3

$$y_h = c_1 e^{-4v} + c_2 e^{3v}$$

$e^{3v} \Rightarrow e^{3v}$ $\quad Ae^{3v} \Rightarrow Ave^{3v}$ (Homojen kısımdan lineer bağımsız yapmak için v ile çarptık)

$e^v \Rightarrow e^v \Rightarrow Be^v$

Belirsiz katsayılar yöntemi

$$y_p = Ave^{3v} + Be^v$$

$$y(x) = c_1 x^{-4} + c_2 x^3 + A \ln x \cdot x^3 + Bx$$ olur

2) $x' = 4x + y + 2t$ diferensel denklem sistemini yok etme yöntemi ile çözünüz

$y' = -2x + y$

Çözüm: $y = x' - 4x - 2t$ (1. denklemde y yi çektik)

$y' = x'' - 4x' - 2$

y' ve y yi 2. denklemde yerine yazalım

$$x'' - 4x' - 2 = -2x + x' - 4x - 2t$$

$x'' - 5x' + 6x = -2t + 2$ (2. mertebeden homojen olmayan denklem)

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 3$ $\Rightarrow$ $x_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$

$x_p = At + B$

$x_p' = A$ $\Rightarrow$ $-5A + 6At + 6B = -2t + 2$

$x_p'' = 0$

$A = -\frac{1}{3}$

$-5A + 6B = 2$

$\frac{5}{3} + 6B = 2$

$6B = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \frac{1}{18}$

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{18}$$

$$y(t) = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{3} - 4c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{3t} + \frac{4}{3}t - \frac{4}{18} - 2t$$

$$= -2c_1 e^{2t} - c_2 e^{2t} - \frac{2t}{3} - \frac{10}{18}$$

3) $x_1' = 2x_1 - 5x_2$

$x_2' = 4x_1 - 2x_2$; $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$

B.D.P nin Çözünüz.

Çözüm. $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}}_{=A} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 4 + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i$$

$\lambda = 4i$ için özvektör bulalım.

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4i & -5 \\ 4 & -2-4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2-4i \,/\, (2-4i)v_1 - 5v_2 = 0$ (1. denklem 2. denklemin $(2-4i)$ katı)

$4v_1 - (2+4i)v_2 = 0$

$\therefore (2-4i)v_1 = 5v_2 \Rightarrow v_1 = 5 \quad v_2 = 2-4i$ seçilebilir.

$$\vec{x}(t) = e^{4it}\begin{bmatrix} 5 \\ 2-4i \end{bmatrix} = (\cos 4t + i\sin 4t)\begin{bmatrix} 5 \\ 2-4i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix}}_{\vec{x}_1(t)} + i\underbrace{\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}}_{\vec{x}_2(t)}$$

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) = c_1\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = c_1\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5}$$

$2c_1 - 4c_2 = 3$

$c_2 = -\frac{11}{20}$

$$\vec{x}(t) = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 5\cos 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t \end{bmatrix} - \frac{11}{20}\begin{bmatrix} 5\sin 4t \\ 2\sin 4t - 4\cos 4t \end{bmatrix}$$