2021-2022 BAHAR DÖNEMİ MAT 202 DERSİ

2. HAFTA

BU HAFTA NELER YAPACAĞIZ?

- HOMOJEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER
- BERNOULLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER
- TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

HOMOGEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

formunda yazılabilen denklemlere ***homogen diferensiyel denklem*** denir.

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

- dönüşümü ile homogen diferensiyel denklem <u>ayrılabilir diferensiyel denkleme</u> dönüşür.

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

Örnek 1

- $2xy\dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2+3y^2}{2xy} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ olup homojen diferensiyel denklemdir.

$y = vx,\quad \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx},\quad v = \dfrac{y}{x},$ ve $\dfrac{1}{v} = \dfrac{x}{y}$ dönüşümü ile $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{3}{2}v$

elde edilir.

$x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{v}{2} = \dfrac{v^2+4}{2v}$ olup $\displaystyle\int \frac{2v}{v^2+4}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln(v^2+4) = \ln|x| + \ln C$ elde edilir. Buradan,

$v^2 + 4 = C|x|;\quad \dfrac{y^2}{x^2} + 4 = C|x|$ ve sonuç olarak $y^2 + 4x^2 = kx^3$ bulunur.

Örnek 2

- $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(x_0) = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$x_0 > 0$ iken bulunuz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafını x'e bölersek, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ elde ederiz.

$y = vx, \quad \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}, \quad v = \dfrac{y}{x}$ dönüşümü ile $v + x\dfrac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 - v^2}$ bulunur.

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$ integralini alırsak $\sin^{-1} v = \ln x + C$ olur.

$v(x_0) = y(x_0)/x_0 = 0$ olduğundan $C = \sin^{-1} 0 - \ln x_0 = -\ln x_0$

$v = \dfrac{y}{x} = \sin(\ln x - \ln x_0) = \sin\left(\ln \dfrac{x}{x_0}\right)$ ve sonuç olarak

$y(x) = x \sin\left(\ln \dfrac{x}{x_0}\right)$ elde edilir.

BERNOULLİ DENKLEMLERİ

- $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

formundaki diferensiyel denklemlere *Bernoulli denklemi* denir.

NOT: $n = 0$ *ise verilen denk lineer denklem* , $n = 1$ ise değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemdir.

$v = y^{1-n}$ dönüşümü ile Bernoulli denklemi

$$\boxed{\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)}$$

lineer denklemine dönüşür.

Örnek 1

- $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{2x} y = \dfrac{2x}{y}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

- **Çözüm:**

$P(x) = -3/(2x),\ Q(x) = 2x,\ n = -1$ olacak şekilde verilen denklem bir Bernoulli denklemidir.

$v = y^2, \quad y = v^{1/2},$ ve $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{2} v^{-1/2} \dfrac{dv}{dx}$ olup

$$\frac{1}{2} v^{-1/2} \frac{dv}{dx} - \frac{3}{2x} v^{1/2} = 2x v^{-1/2}$$

elde edilir.

- Denklemin her iki yanını $2v^{1/2}$ ile çarparsak $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{3}{x} v = 4x$ lineer denklemini elde ederiz.

Örnek 1 Devam

- $\rho = e^{\int(-3/x)\,dx} = x^{-3}$ integral çarpanı ile denklemin her iki yanını çarptığımızda

$$D_x(x^{-3}v) = \frac{4}{x^2}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$x^{-3}v = -\frac{4}{x} + C;$$

$$x^{-3}y^2 = -\frac{4}{x} + C;$$

$$y^2 = -4x^2 + Cx^3$$

bulunur.

Örnek 2

- $x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$n = \frac{4}{3}, \quad 1 - n = -\frac{1}{3}$ ile verilen denklem bir Bernoulli denklemidir.

$v = y^{-1/3}, \quad y = v^{-3}$ ve $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx} = -3v^{-4}\dfrac{dv}{dx}$ ile

$$-3xv^{-4}\frac{dv}{dx} + 6v^{-3} = 3xv^{-4}$$

elde edilir. Denklemin her iki yanını $-3xv^{-4}$ ile bölersek

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1$$

lineer denklemini buluruz.

Örnek 2 Devam

- $\rho = e^{\int (-2/x)\, dx} = x^{-2}$ integral çarpanını denklemin her iki yanı ile çarparsak

$$D_x(x^{-2}v) = -\frac{1}{x^2}; \quad x^{-2}v = \frac{1}{x} + C; \quad v = x + Cx^2$$

buluruz. Sonuç olarak

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}$$

elde edilir.

TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

- Birinci mertebeden diferansiyel denklemin y(x) genel çözümü genellikle

$$F(x, y(x)) = C$$

kapalı formu ile tanımlanır.(C sabit)

Öte yandan, çözüm göz önüne alındığında, orijinal diferansiyel denklemin genel formunu her iki tarafın x'e göre türevini alarak aşağıdaki şekilde buluruz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Yani,

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$ öyle ki

$$M(x, y) = F_x(x, y)$$

$$N(x, y) = F_y(x, y)$$

$$\boxed{M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0}$$

- Açıkça görülüyor ki, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ koşulunu sağlayan $F(x, y)$ fonksiyonu için

$$F(x, y) = C$$

yukarıdaki diferensiyel denklemin genel çözümüdür.

Bu diferensiyel denkleme ise ***TAM DİFERENSİYEL DENKLEM*** denir.

Tamlık Kriteri

- Kabul edelim ki M ve N fonksiyonları R: $a < x < b, c < y < d$ bölgesinde sürekli olsun ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Bu durumda

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

diferensiyel denklemin R de TAM olması için gerek ve yeter koşul R deki her noktada

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

sağlanmasıdır. Yani;

R de $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ ve $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ olan $F(x, y)$ fonksiyonu tanımlıdır ancak ve ancak

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ sağlanır.

Tam Diferensiyel Denklemlerin Genel Çözümünü Nasıl Bulacağız?

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M$$

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y)$$

$$N = \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right) + g'(y)$$

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx$$

İntegrali hesaplayıp
denklemde yerine
yazalım

Örnek

$$(6xy - y^3)\,dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,dy = 0.$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= 6xy - y^3 \\ N(x,y) &= 4y + 3x^2 - 3xy^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ de x'e göre integral alınırsa,

$$F(x,y) = \int (6xy - y^3)\,dx = 3x^2y - xy^3 + g(y)$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$ olduğundan, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$

$$g'(y) = 4y \Rightarrow g(y) = 2y^2 + C_1 \Rightarrow F(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1$$

$\boxed{3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C}$ genel çözümdür.

TAM HALE GETİRME

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

diferensiyel denklemini tam değilse, yani

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ise, denklem uygun bir $h(x,y)$ fonksiyonu ile çarpılarak tam hale getirilebilir.

Bu $h(x,y)$ fonksiyonuna denklemin ***integral çarpanı*** denir.

Peki $h(x,y)$ fonksiyonunu nasıl bulacağız?

Kural 1

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \quad \Rightarrow \quad h(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Dikkat edelim ki $f(x)$ sadece x'e bağlı

Kural 2

$$\frac{M_y - N_x}{M} = g(y) \quad \Rightarrow \quad h(y) = e^{-\int g(y)dy}$$

Dikkat edelim ki $g(y)$ sadece y'e bağlı

Örnek

- $(x^5+3y)dx - xdy = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= x^5+3y \\ N(x,y) &= -x \end{aligned}\right) \Rightarrow \quad M_y = 3 \text{ ve } N_x = -1 \text{ olduğundan TAM DEĞİLDİR.}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{-x}(3-(-1)) = \frac{-4}{x}$$

Sadece x'e bağlı

- $h(x) = e^{\int \frac{-4}{x}dx} = \frac{1}{x^4}$ integral çarpanı ile denklemin iki tarafını çarpalım:

$$\frac{1}{x^4}(x^5+3y)dx - x\frac{1}{x^4}dy = 0$$

$$(x+\frac{3}{x^4}y)dx - \frac{1}{x^3}dy = 0$$

denklemini elde ederiz. Tam olup olmadığını kontrol edelim: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{3}{x^4} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olup TAMDIR.

Bu diferensiyel denklemin çözümü

$$F(x,y) = \frac{-y}{x^3} + \frac{x^2}{2} = C$$

dır. (ÖDEV)

Örnek

$$-ydx + (x+y)dy = 0$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= -y \\ N(x,y) &= x+y \end{aligned}\right) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

olup TAM DEĞİLDİR.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x+y}(-1-1) = \frac{-2}{x+y}$$

Sadece x e bağlı değil

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-2}{-y}$$

Sadece y ye bağlı

$$\Rightarrow \quad h(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}$$

- Denklemin her iki yanını integral çarpanı ile çarpalım:

$$\frac{1}{y^2}(-y)dx + \frac{1}{y^2}(x+y)dy = 0$$

$$\frac{-1}{y}dx - \frac{(x+y)}{y^2}dy = 0$$

Burada $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olup denklem TAMDIR.

$F(x,y) = \dfrac{-x}{y} + \ln|y| = C$ bu diferensiyel denklemin genel çözümüdür.

(ÖDEV)

RİCCATİ DİFERENSİYEL DENKLEMİ

- $$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + \mathrm{B(x)y} + \mathrm{C(x)}$$

  formunda yazılabilen denklemlere ***riccati diferensiyel denklemi*** denir.

- Riccati diferensiyel denkleminin bir $y_1(x)$ özel çözümü biliniyorsa $y = y_1(x) + \frac{1}{v}$

  dönüşümü ile Riccati diferensiyel denklemi lineer diferensiyel denkleme dönüşür.

Örnek

$$\frac{dy}{dx} - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$$

denkleminin bir özel çözümü $y_1(x) = x$ olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen $\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2(x-1)y - x^2 + 2x + 1$ denkleminde $A(x) = -1, B(x) = 2(x-1)$ ve

$C(x) = -x^2 + 2x + 1$ olup denklem Riccati Diferensiyel Denklemidir. $y = x + \frac{1}{v}$ dönüşümünü uygularsak,

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$ olup verilen denklemde yerine yazdığımızda,

$1 - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\left(x + \frac{1}{v}\right)^{\mathbf{2}} + 2(x-1)\left(x + \frac{1}{v}\right) - x^2 + 2x + 1$ den $\boldsymbol{\frac{dv}{dx} - 2v = 1}$ lineer diferensiyel denklemi

elde edilir. Buradan $\rho(x) = e^{-2x}$ integral çarpanı kullanılarak lineer denklemin çözümü $\mathbf{v(x)} = \boldsymbol{Ce^{2x}} - \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

Verilen Riccati Denkleminin çözümü de $v = \frac{1}{y-x}$ den $\boldsymbol{\frac{1}{y-x} = Ce^{2x} - \frac{1}{2}}$ dir.