MAT-201 Doğrusal Cebir Final Soruları

Ad Soyad:
Numara:

1	2	3	4	5	Toplam

Açıklamalar: **Süre 120 dakikadır. Her sorudan TAM PUAN almak için çözümlerinizde gerekli ve yeterli tüm açıklamalar yapılmalıdır. BAŞARILAR 29/11/2018**

1-i) $< \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **her** $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ **için** $< u, v >= 4u_1v_1 + 9u_2v_2$ **ile tanımlanan bu kural bir iç çarpım fonsiyonu mudur? (5 p)**

a) $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\langle u,u\rangle = 4u_1^2+9u_2^2 \geq 0$ ve $\langle u,u\rangle = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} u=0$

$(\Rightarrow)$ $\langle u,u\rangle=0 \Rightarrow 4u_1^2+9u_2^2=0 \Rightarrow u_1^2=0 \wedge u_2^2=0 \Rightarrow u_1=0, u_2=0 \Rightarrow u=(u_1,u_2)=($

$(\Leftarrow)$ $u=(u_1,u_2)=0 \Rightarrow u_1=0, u_2=0 \Rightarrow 4u_1^2+9u_2^2=0=\langle u,u\rangle$

b) $\forall u,v \in \mathbb{R}^2$, $\langle u,v\rangle = 4u_1v_1+9u_2v_2 \overset{\text{çarpmanın değ. d.}}{=} 4v_1u_1+9v_2u_2 = \langle v,u\rangle$

c) $\forall u,v,w \in \mathbb{R}^2$ için $\langle u+v,w\rangle \overset{?}{=} \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$, $u+v=(u_1+v_1, u_2+v_2)$ ol

$\langle u+v,w\rangle = 4(u_1+v_1).w_1+9(u_2+v_2).w_2 = 4u_1w_1+9u_2w_2+4v_1w_1+9v_2w_2 = \langle u,w\rangle+\langle v,$

d) $\forall c\in\mathbb{R}$, $\forall u,v\in\mathbb{R}^2$ için $c.\langle u,v\rangle \overset{?}{=} \langle cu,v\rangle$

$c.\langle u,v\rangle = c(4u_1v_1+9u_2v_2) = 4cu_1v_1+9u_2v_2 = \langle cu,v\rangle$ koşulları sağlandığından soruda tanımlanan kural bir iççarpım fonksiyonudur.

-ii) V **bir vektör uzayı ve** $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ **ise** V **nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. Bu durumda** $T = \{v_1 + 2v_2 + v_3,\ 2v_2 - v_3,\ v_1 + 3v_3\}$ **kümesi lineer bağımsız mıdır? (5 p)**

T kümesinin lineer bağımsızlığını göstermek için;

$c_1(v_1+2v_2+v_3)+c_2(2v_2-v_3)+c_3(v_1+3v_3)=0$ iken $c_1=c_2=c_3=0$ old. göstercez

$v_1(c_1+c_3)+v_2(2c_1+2c_2)+v_3(c_1-c_2-3c_3)=0$ ve $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ lin. bağsız old

v_1,v_2,v_3 vektörlerinin her türlü lineer kombinasyonlarının 0 olması durumunda katsayılar 0 olacaktır;

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_3&=0\\ 2c_1+2c_2&=0\\ c_1-c_2-3c_3&=0\end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&2&0&0\\1&-1&3&0\end{array}\right] \xrightarrow{-r_1+r_3\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&2&0&0\\0&-1&2&0\end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1+r_2\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&-2&0\\0&-1&2&0\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_2}{2}\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&2&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{r_2+r_3\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_1\to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$c_1=c_2=c_3=0$ old. T kümesi lineer bağımsızdır.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **matrisinin**

i) Satır uzayını bulunuz ve bu uzayın boyutunu belirleyiniz. (10 p)

$v_1 = [1 \ 1 \ 2 \ -1]$, $v_2 = [3 \ 2 \ 1 \ 1]$, $v_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$ satır vektörleri olmak üzere

A'nın satır uzayı $= \{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \ ; \ c_i \in \mathbb{R}\}$ için baz bulalım: 4 puan

Bu uzayın gerenleri A'nın satırları old. $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ için Span $S = A$'dır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-3r_3 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_3 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{-r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4 puan

S'nin vektörleri lineer bağımsız ve Span S = A'nın Satır Uzayıdır. O halde; A'nın satır uzayı için bazdır.

boy (Satır Uzayı) = 3 2 puan

ii) Sütun uzayını bulunuz ve bu uzayın boyutunu belirleyiniz. (10 p)

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sütun vektörleri olmak üzere

4 puan

A'nın sütun uzayı $= \{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 \ ; \ c_i \in \mathbb{R}\}$ için baz bulalım:

Bu uzayın gerenleri A'nın sütunları old. $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ için Span $S = A$'dır.

A'nın transpozunu olarak satır işlemleri uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4r_2 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-5r_2 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{-r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 puan

S kümesinden lineerbağımsızlığı bozan u_4 vektörünü çıkaralım;

$S' = \{u_1, u_2, u_3\}$ lineer bağımsız ve Span S' = A'nın Sütun Uzayıdır.

O halde, boy (Sütun Uzayı) = 3 2 puan

3-i) $L : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, $L(x,y,z) = (x-2y-z,\ x-y+z,\ x+y-2z)$ **lineer dönüşümüveriliyor Buna göre bu dönüşümün *sırasıyla* tanım uzayının** $S = \{(1,0,1), (-2,1,1), (1,-1,1)\}$ **bazı ve görüntü uzayının** $T = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ **bazına göre matris gösterimini bulunuz. (15 p)**

$L(v_1) = (0,2,-1) = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = (a_1,a_1,a_1) + (a_2,a_2,0) + (a_3,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 = -1 \end{array} \Rightarrow a_2 = 3,\ a_3 = -2 \Rightarrow [L(v_1)]_T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$L(v_2) = (-5,-2,-3) = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = (a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2,\ a_1)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = -5 \\ a_1 + a_2 = -2 \\ a_1 = -3 \end{array} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = -3 \Rightarrow [L(v_2)]_T = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$L(v_3) = (2,3,-2) = (a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2,\ a_1)$

$$\rightarrow \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 = -2 \end{array} \Rightarrow a_2 = 5,\ a_3 = -1 \Rightarrow [L(v_3)]_T = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O zaman L dönüşümüne ve S, T bazlarına göre A'nın matris gösterimi şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

-ii) **Bu dönüşüme ait Çek$L$ ve ImL kümelerini bulunuz. (5 p)**

$L(x,y,z) = (x-2y-z,\ x-y+z,\ x+y-2z)$

$= x(1,1,1) + y(-2,-1,1) + z(-1,1,-2)$

$\text{Çek}L = \{ v \in \mathbb{R}_3 \mid L(v) = 0_{\mathbb{R}_3} \}$ kümesini bulalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{\frac{r_3}{7} \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-3r_3+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{Çek}L = \{(0,0,0)\}$

$\text{Im}\,L = \{ x(1,1,1) + y(-2,-1,1) + z(-1,1,-2) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$

NOT: Bu üç vektörden elde edilen matris yukarıda eşelon forma geldiğinde lin. bağımsız old. görülebilir.

$\text{Im}L = \text{Span}\{(1,1,1), (-2,-1,1), (-1,1,-2)\}$

Bu küme lineer bağımsız ve ImL'yi gerdiği için bir bazdır.

$\text{boy}(\text{Im}L) = 3$

-iii) **Bu dönüşüm 1-1 ve örten midir? (5 p)**

1-1 lik: "L, 1-1 $\Leftrightarrow$ $\text{Çek}L = \{0_W\}$" teoreminden L, 1-1 'dir.

örtenlik: " $L: U \to V$

$\text{boy}\, V = \text{boy}\, \text{Im}L \Rightarrow L$, örtendir."

$\text{boy}\, \mathbb{R}_3 = 3 = \text{boy}(\text{Im}L)$ old. L, örtendir.

4-i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrinin tersini adjoint matris yardımı ile bulunuz. (15 p)**

1. satıra göre açalım:

$$\det A = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+3-3 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\, A}{\det A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) **Bir A matrisinin TERSİNİN özdeğerleri 2, 3, 4 olup, sırasıyla bunlara karşılık gelen özvektörleri**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ise A matrisinin kendisini bulunuz. (10 p)

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $D = P^{-1}A^{-1}P$ eşitliğinin her iki tarafın (−1). kuvvetini alırsak $D^{-1} = P^{-1}AP$ elde ederiz. Buradan $A = PD^{-1}P^{-1}$ dır.

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{P} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1 \to r_2} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{r_2 + r_3 \to r_3} \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow[-r_2 \to r_2]{-r_3 + r_1 \to r_3} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{P^{-1}}\right]$$

ve $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ dır. A'yı bulmak için $A = PD^{-1}P^{-1}$ çarpımını hesaplayalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & -1/12 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/12 & -1/12 & 1/4 \end{bmatrix}$$

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *simetrik* matrisini P *ortogonal* bir matris olmak üzere $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde köşegenleştiriniz. P ortogonal matrisini, P^{-1} matrisini ve D köşegen matrislerini bulunuz. (20 p)

1.satıra göre açalım

$$K_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right] + (\lambda-1+1) - (-1+1-\lambda) = -\lambda^2(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=3$$

Özvektörlerini bulalım:

$\underline{\lambda_{1,2}=0}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+r_3\to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2=k \\ x_3=m \\ x_1=k+m \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ k\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + m\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2},\ k,m \in \mathbb{R} \right.$

$\underline{\underline{\lambda_3=3}}$: $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2\to r_1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3\to r_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_1\to r_3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{r_1}{3}\to r_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$\xrightarrow{2r_1+r_2\to r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3=k \\ x_1=-k \\ x_2=k \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ k\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} ;\ k \in \mathbb{R} \right\}$

Şimdi v_1, v_2'nin ortogonalliğini kontrol edelim:

$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \neq 0$. O zaman Gram-Schmidt'ten ortogonal yapalım:

$$u_1 = v_1,\quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ortogonal u_1, u_2 vektörlerini ve v_3'ü normalize edelim:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\quad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix},\quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

w_1, w_2, w_3 vektörleri için;

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ matrisi ortogonaldir. } \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A simetrik old. $P^{-1} = P^T$ dur.