MAT-201 Doğrusal Cebir Final Soruları

Ad Soyad:
Numara:

1	2	3	4	5	Toplam

Açıklamalar: **Süre 120 dakikadır. Her sorudan TAM PUAN almak için çözümlerinizde gerekli ve yeterli tüm açıklamalar yapılmalıdır. BAŞARILAR 29/11/2018**

1-i) $< \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, **her** $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ **için** $< u, v >= 4u_1v_1 + 9u_2v_2$ **ile tanımlanan bu kural bir iç çarpım fonsiyonu mudur? (5 p)**

a) $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\langle u,u\rangle = 4u_1^2+9u_2^2 \geq 0$ ve $\langle u,u\rangle = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} u=0$

($\Rightarrow$) $\langle u,u\rangle=0 \Rightarrow 4u_1^2+9u_2^2=0 \Rightarrow u_1^2=0 \wedge u_2^2=0 \Rightarrow u_1=0, u_2=0 \Rightarrow u=(u_1,u_2)=($

($\Leftarrow$) $u=(u_1,u_2)=0 \Rightarrow u_1=0, u_2=0 \Rightarrow 4u_1^2+9u_2^2=0=\langle u,u\rangle$

b) $\forall u,v \in \mathbb{R}^2$, $\langle u,v\rangle = 4u_1v_1+9u_2v_2 \overset{\text{çarpmanın değ.d.}}{=} 4v_1u_1+9v_2u_2 = \langle v,u\rangle$

c) $\forall u,v,w \in \mathbb{R}^2$ için $\langle u+v,w\rangle \overset{?}{=} \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$, $u+v=(u_1+v_1, u_2+v_2)$ al

$\langle u+v,w\rangle = 4(u_1+v_1).w_1 + 9(u_2+v_2).w_2 = 4u_1w_1+9u_2w_2+4v_1w_1+9v_2w_2 = \langle u,w\rangle + \langle v$

d) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall u,v \in \mathbb{R}^2$ için $c.\langle u,v\rangle \overset{?}{=} \langle cu,v\rangle$

$c.\langle u,v\rangle = c(4u_1v_1+9u_2v_2) = 4cu_1v_1+9u_2v_2 = \langle cu,v\rangle$ koşulları sağlandığından soruda tanımlanan kural bir iççarpım fonksiyonudur.

-ii) V **bir vektör uzayı ve** $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ **ise** V **nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. Bu durumda** $T = \{v_1 + 2v_2 + v_3,\ 2v_2 - v_3,\ v_1 + 3v_3\}$ **kümesi lineer bağımsız mıdır? (5 p)**

T kümesinin lineer bağımsızlığını göstermek için;

$c_1(v_1+2v_2+v_3)+c_2(2v_2-v_3)+c_3(v_1+3v_3)=0$ iken $c_1=c_2=c_3=0$ old. gösterelim

$v_1(c_1+c_3)+v_2(2c_1+2c_2)+v_3(c_1-c_2-3c_3)=0$ ve $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ lin.bağımsız old.

v_1,v_2,v_3 vektörlerinin her türlü lineer kombinasyonlarının 0 olması durumunda katsayılar 0 olacaktır;

$$\left.\begin{array}{l} c_1+c_3=0 \\ 2c_1+2c_2=0 \\ c_1-c_2-3c_3=0 \end{array}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_1+r_3\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_1+r_2\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_2}{2}\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3\to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+r_3\to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_1\to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$c_1=c_2=c_3=0$ old. T kümesi lineer bağımsızdır.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **matrisinin**

i) **Satır uzayını bulunuz ve bu uzayın boyutunu belirleyiniz. (10 p)**

$v_1 = [1\ 1\ 2\ -1]$, $v_2 = [3\ 2\ 1\ 1]$, $v_3 = [1\ 1\ 1\ 0]$ satır vektörleri olmak üzere

A'nın satır uzayı $= \{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \ ; \ c_i \in \mathbb{R}\}$ için baz bulalım:

Bu uzayın gerenleri A'nın satırları old. $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ için Span $S = A$ 'dır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 3r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-3r_3 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5r_3 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{-r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

S'nin vektörleri lineer bağımsız ve Span $S = A$ old. S kümesi A için bazdır.

O halde;

boy (Satır Uzayı) $= 3$

ii) **Sütun uzayını bulunuz ve bu uzayın boyutunu belirleyiniz. (10 p)**

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sütun vektörleri olmak üzere

A'nın sütun uzayı $= \{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 \ ; \ c_i \in \mathbb{R}\}$ için baz bulalım:

Bu uzayın gerenleri A nın sütunları old. $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ için Span $S = A$ 'dır.

A'nın transpozunu olarak satır işlemleri uygulayalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4r_2 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{5r_2 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_4 \to r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2 + r_1 \to r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-r_3 \to r_3]{-r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S kümesinden lineerbağımsızlığı bozan u_4 vektörünü çıkartalım;

$S' = \{u_1, u_2, u_3\}$ lineer bağımsız ve Span $S' = A$ old. S', A için bazdır.

O halde, boy (Sütun Uzayı) $= 3$

3-i) $L : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$, $L(x, y, z) = (x - 2y - z,\ x - y + z,\ x + y - 2z)$ **lineer dönüşümüveriliyor Buna göre bu dönüşümün** ***sırasıyla*** **tanım uzayının** $S = \{(1,0,1), (-2,1,1), (1,-1,1)\}$ **bazı ve görüntü uzayının** $T = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ **bazına göre matris gösterimini bulunuz. (15 p)**

$$L(v_1) = (0, 2, -1) = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = (a_1, a_1, a_1) + (a_2, a_2, 0) + (a_3, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 2 \\ a_1 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow a_2 = 3,\ a_3 = -2 \quad \Rightarrow [L(v_1)]_T = (-1, 3, -2)$$

$$L(v_2) = (-5, -2, -3) = a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = (a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2,\ a_1)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= -5 \\ a_1 + a_2 &= -2 \\ a_1 &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = -3 \quad \Rightarrow [L(v_2)]_T = (-3, 1, -3)$$

$$L(v_3) = (2, 3, -2) = (a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2,\ a_1)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2 \\ a_1 + a_2 &= 3 \\ a_1 &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow a_2 = 5,\ a_3 = -1 \quad \Rightarrow [L(v_3)]_T = (-2, 5, -1)$$

O zaman L dönüşümüne ve S, T bazlarına göre A'nın matris gösterimi şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

-ii) **Bu dönüşüme ait Çek$L$ ve ImL kümelerini bulunuz. (5 p)**

$L(x,y,z) = (x-2y-z,\ x-y+z,\ x+y-2z)$

$= x(1,1,1) + y(-2,-1,1) + z(-1,1,-2)$

$\text{Çek}L = \{ v \in \mathbb{R}_3 \mid L(v) = 0_{\mathbb{R}_3} \}$ kümesini bulalım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2r_1+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2r_2+r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow{\frac{r_3}{7} \to r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-3r_3+r_2 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2+r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{Çek}L = \{(0,0,0)\}$

$\text{Im}\,L = \{ x(1,1,1) + y(-2,-1,1) + z(-1,1,-2) \mid x,y,z \in \mathbb{R} \}$

NOT: Bu üç vektörden elde edilen matris yukarıda eşelon forma geldiğinde lin. bağımsız old. görülebilir.

$\text{Im}L = \text{Span}\{ (1,1,1), (-2,-1,1), (-1,1,-2) \}$

Bu küme lineer bağımsız ve ImL'yi gerdiği için bir bazdır.

$\text{boy}(\text{Im}L) = 3$

-iii) **Bu dönüşüm 1-1 ve örten midir? (5 p)**

<u>1-1 lik</u>: "L, 1-1 $\Leftrightarrow$ Çek$L = \{0_W\}$" teoreminden L, 1-1 'dir

<u>örtenlik</u>: "$L: U \to V$

boy V = boy ImL $\Rightarrow L$, örtendir."

boy $\mathbb{R}_3 = 3 =$ boy(ImL) old. L, örtendir.

4-i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **matrinin tersini adjoint matris yardımı ile bulunuz. (15 p)**

1. satıra göre açalım:

$$\det A = 1.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+3-3 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj} A}{\det A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) **Bir A matrisinin TERSİNİN özdeğerleri 2, 3, 4 olup, sırasıyla bunlara karşılık gelen özvektörleri**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ise A matrisinin kendisini bulunuz. (10 p)

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $D = P^{-1}A^{-1}P$ eşitliğinin her iki tarafın

(-1). kuvvetini alırsak $D^{-1} = P^{-1}AP$ elde ederiz. Buradan $A = PD^{-1}P^{-1}$ dır.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{P} \left|\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1 \to r_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 + r_3 \to r_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 + r_1 \to r_1} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_2 + r_3]{-r_3 + r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$I \qquad P^{-1}$

ve $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ dır. A'yı bulmak için $A = PD^{-1}P^{-1}$ çarpımını hesaplayalım:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/12 & -1/12 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/12 & -1/12 & 1/4 \end{bmatrix}$$

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ***simetrik*** **matrisini** P ***ortogonal*** **bir matris olmak üzere** $P^{-1}AP = D$ **olacak şekilde köşegenleştiriniz.** P **ortogonal matrisini,** P^{-1} **matrisini ve** D **köşegen matrislerini bulunuz. (20 p)**

1. satıra göre açalım

$$K_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] + (\lambda - 1 + 1) - (-1 + 1 - \lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 3$$

Özvektörlerini bulalım:

$\underline{\lambda_{1,2} = 0}$: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = k \\ x_3 = m \\ x_1 = k + m \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ k \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + m \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2},\ k, m \in \mathbb{R} \right.$

$\underline{\lambda_3 = 3}$: $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2 \to r_1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_3 \to r_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 \to r_3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{r_1}{3} \to r_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$

$\xrightarrow{2r_1 + r_2 \to r_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = k \\ x_1 = -k \\ x_2 = k \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ k \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3};\ k \in \mathbb{R} \right\}$

Şimdi v_1, v_2'nin ortogonalliğini kontrol edelim:

$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \neq 0$. O zaman Gram-Schmidt'ten ortogonal yapalım:

$$u_1 = v_1,\quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ortogonal u_1, u_2 vektörlerini ve v_3'ü normalize edelim:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\quad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix},\quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

w_1, w_2, w_3 vektörleri için;

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ matrisi ortogonaldir.}\quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A simetrik old. $P^{-1} = P^T$ dur.