

5. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$a_n = \frac{2^n + 5}{3^n} \text{ olsun. Oran testi ile } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n + 5}$$

2. yol: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
geometrik serileri $\frac{1}{3} < 1$ ve $\frac{1}{3} < 1$ old. için yakınsaktır. \circ halde
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ yakınsar!

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3(2^n + 5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(2 + \frac{5}{2^n})}{3(2^n + 5)} = \frac{2}{3} < 1 \text{ old. için yakınsaktır.}$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Kök testi ile: $a_n = \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ olsun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1 \text{ old. için yakınsaktır.}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ serisinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ alterne serisinin yakınsaklığını inceleyelim:
Alterne seri testi ile: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ olsun.
i) $|a_n| = \frac{1}{2n-1}$ azalmaktadır.

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ iraksar}$$

$\circ \circ$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ancak $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ iraksak old. için verilen seri şartlı yakınsaktır.



TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2019-2020 BAHAR DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, ARASINAV
29 ŞUBAT 2020

Adı Soyadı:

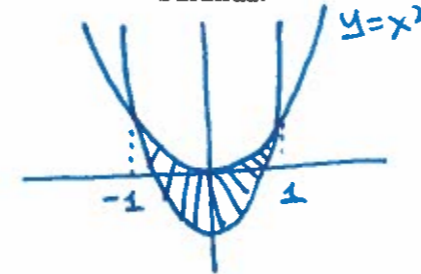
No:

İMZA:

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (20 p.)	4. (15 p.)	5. (25 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 120 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $x^2 - y = 0$ ve $4x^2 - y = 3$ eğrileriyle çevrili bölgeyi xy-düzleminde belirtiniz ve bu bölgenin alanını bulunuz.



$$\text{Alan} = \int_{-1}^1 [x^2 - (4x^2 - 3)] dx = \int_{-1}^1 [-3x^2 + 3] dx = \left[-3 \frac{x^3}{3} + 3x \right]_{-1}^1 = [3x - x^3]_{-1}^1 = (3-1) - (-3+1) = 2 - (-2) = 4 \text{ br}^2$$

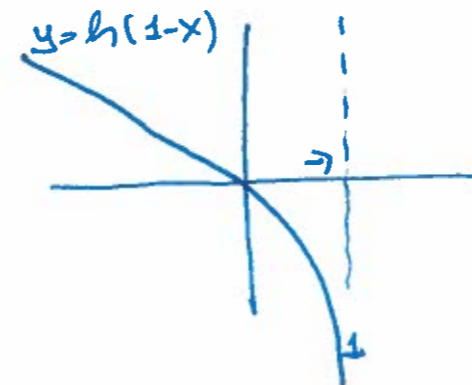
$$\begin{aligned} x^2 - y = 0 &\Rightarrow y = x^2 \text{ (parabol)} \\ 4x^2 - y = 3 &\Rightarrow y = 4x^2 - 3 \\ x=0 &\Rightarrow y = -3 \\ y=0 &\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

eksenler kesim noktası

(b) $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ integralini hesaplayınız.

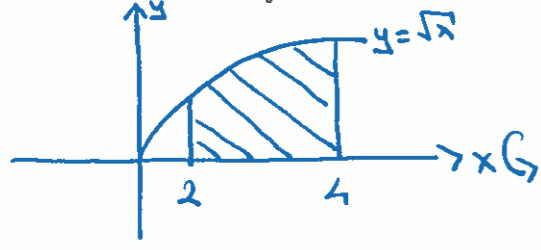
2. tip has olmayan integral: $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonu $t < 1$ için (ort) de integrallenebilir. $x=1$ de tanımsız.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln|1-x|]_0^t$$



$$\begin{aligned} &= -\lim_{t \rightarrow 1^-} [\ln(1-t) - \ln 1] \\ &= -\lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) \\ &= -(-\infty) \\ &= \infty \end{aligned}$$

2. (a) $y = \sqrt{x}$ eğrisi, $x = 2$, $x = 4$ doğruları ve x-ekseni arasında kalan bölge x-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.

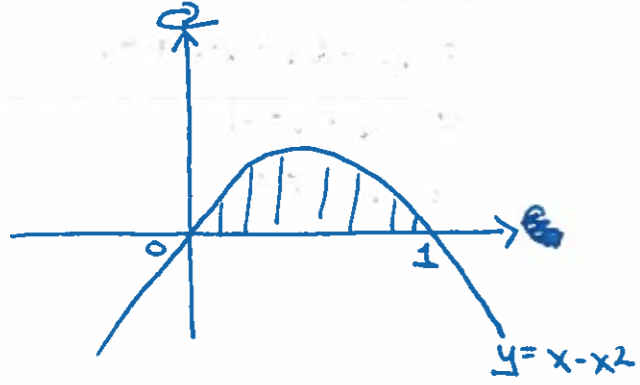


Dişak yöntemi ile

$$V = \int_2^4 \pi f^2(x) dx = \int_2^4 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_2^4$$

$$= \frac{\pi}{2} (16 - 4) = 6\pi$$

- (b) $y = x - x^2$ parabolü ve x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülüyor. Dönel cismin hacmini bulunuz.



Kabuk yönt. ile

$$V = \int_0^1 2\pi x f(x) dx$$

$$= \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{e^{y^2+3x}}{y} = 0$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{e^{y^2+3x}}{y} \Rightarrow -y e^{-y^2} dy = e^{3x} dx \quad (\text{ayrılabilir})$$

$$\Rightarrow \int -y e^{-y^2} dy = \int e^{3x} dx + c$$

$$u = -y^2 \Rightarrow du = -2y dy \Rightarrow -y dy = \frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$\Rightarrow \frac{e^u}{2} = \frac{e^{3x}}{3} + c$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-y^2}}{2} = \frac{e^{3x}}{3} + c \quad \text{kapalı çözümü bulunur.}$$

4. $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ olsun.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ olur.