TOBB
EKONOMİ VE TEKNOLOJİ
ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2018-2019 BAHAR DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
28 MART 2019

Adı Soyadı: Zeki Çalışkan   No: 3,14159265...   İMZA: π

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (20 p.)	4. (20 p.)	5. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2k+1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Oran testi:

$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{k+1}}{2k+3} \cdot \frac{2k+1}{(x-1)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} |x-1| = |x-1| < 1$ ise yakınsak

$\Rightarrow -1 < x-1 < 1$ i) $x=0$ için: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ alterne seri testinden yakınsak

$\Rightarrow 0 < x < 2$ ii) $x=2$ için: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ ıraksak ($\sum \frac{1}{k}$ ile limit karşılaş)

O halde yakınsaklık aralığı $[0,2)$ ve yakınsaklık yarıçapı 1

2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ kuralıyla verilen f fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki Taylor serisini bulunuz.

$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

$f'''(x) = -\frac{6}{(x+2)^4}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1} n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$

II. yol: $f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{x}{2}+1}$

$\boxed{\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \ |t|<1}$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}$ $t = -\frac{x}{2}$ hali

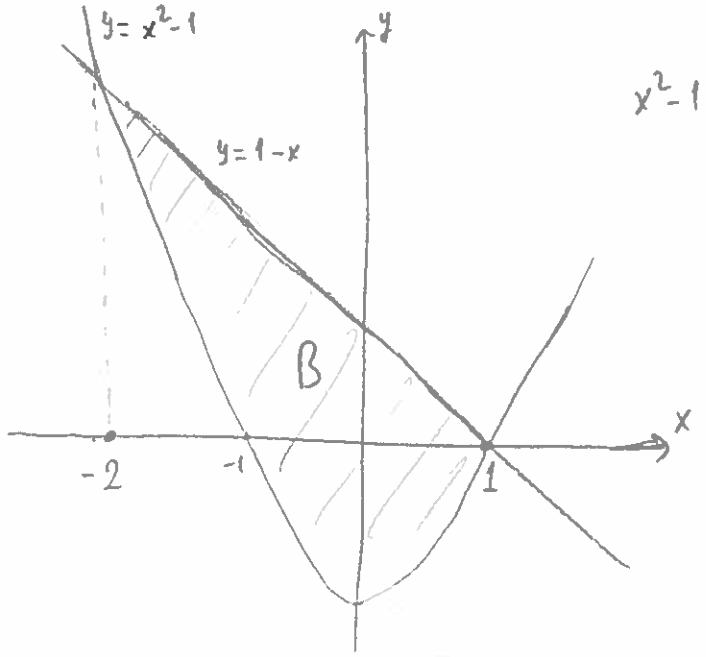
$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$

5. xy-düzleminde $y = x^2 - 1$ eğrisi ile $y = 1 - x$ doğrusu tarafından sınırlanan noktaların oluşturduğu bölge B olsun. B bölgesini çiziniz ve $f(x,y) = xy$ olduğuna göre

$$\iint_B f(x,y)\,dA$$

integralini hesaplayınız.



$x^2 - 1 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \quad x = 1$

$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_{x=-2}^{x=1} \int_{y=x^2-1}^{y=1-x} xy\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{1} \left[x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2-1}^{y=1-x} \right] dx$

$= \int_{-2}^{1} x\frac{(1-x)^2}{2} - x\frac{(x^2-1)^2}{2}\,dx$

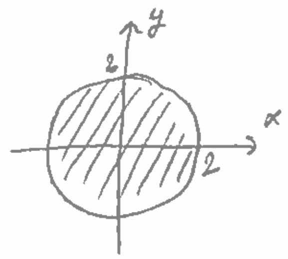
$= \int_{-2}^{1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2} - \frac{x^5 - 2x^3 + x}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{1} -x^5 + 3x^3 - 2x^2\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^6}{6} + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^{1} \right)$

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \left(\frac{64}{6} + \frac{3.16}{4} + \frac{2.8}{3} \right) \right] = \frac{1}{2}\left[\frac{63}{6} - \frac{45}{4} - 6 \right] = -\frac{27}{8}$

3. (a) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz ve bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Tanımlı olması için $4-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2^2$



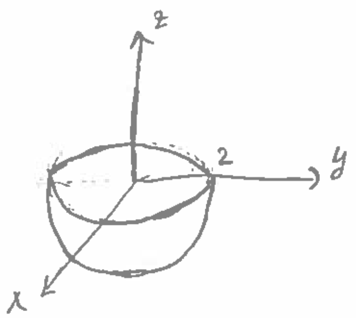
$z=-\sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=4-x^2-y^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=2^2$

$\Rightarrow (0,0,0)$ merkezli

$r=2$ yarıçaplı küre

$\Rightarrow z$, negatif değerler alacağından kürenin alt kısmı



(b) $z=xy^2+x^4y$, $x=\sin(\ln t)$ ve $y=\cos(e^{t-1})$ olduğuna göre zincir kuralı yardımıyla $\frac{dz}{dt}$ türevini bulunuz ve $t=1$ noktasında $\frac{dz}{dt}$ türevini hesaplayınız.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=(y^2+4x^3y)\left(\frac{1}{t}\cos(\ln t)\right)+(2xy+x^4)\left(-e^{t-1}\cos(e^{t-1})\right)$$

$t=1$ için $x=\sin(\ln 1)=\sin(0)=0$

$y=\cos(e^{1-1})=\cos(e^{0})=\cos(1)$

O halde

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=(\cos^2(1)+4.0.\cos 1)(1.\cos(0))+(2.0.\cos(1)+0^4)(-1\cos(1))$$

$$=\cos^2(1)$$

4. (a) İki tip su motoru üreten bir şirket, birinci tipten yılda x (bin) adet, ikinci tipten yılda y (bin) adet sattığında, satış sayılarına bağlı olarak şirketin yıllık gelir fonksiyonu

$$R(x,y)=-\frac{3}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+2x+6y+50$$

eşitliğiyle verilmiştir. Gelirin maksimum olması için her bir tür motordan kaçar tane satılmalıdır? Maksimum gelir kaçtır?

$$\left.\begin{aligned}R_x&=-3x+y+2=0\\R_y&=x-y+6=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2x+8=0\Rightarrow \begin{aligned}x&=4\\y&=10\end{aligned}$$ $(4,10)$ kritik nokta

$R_{xx}=-3$ $\quad R_{xy}=1$

$R_{yy}=-1$

$\Rightarrow D(x,y)=R_{xx}R_{yy}-(R_{xy})^2=(-3)(-1)-1^2=2>0$ ve $R_{xx}=-3<0$

olduğundan $(4,10)$ yerel max

Max gelir $=R(4,10)=\underbrace{-\frac{3}{2}4^2}_{-24}+\underbrace{4.10}_{40}\underbrace{-\frac{1}{2}10^2}_{-50}+\underbrace{2.4}_{8}+\underbrace{6.10}_{60}+\underbrace{50}_{50}=84$ (bin TL)

(b) $f(x,y)=x^2-y^2$ olduğuna göre f nin, $x+2y=3$ koşulunu sağlayan ekstremum değerleri varsa bulunuz.

$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+\lambda(x+2y-3)$

$L_x=2x+\lambda=0\Rightarrow x=-\frac{\lambda}{2}$

$L_y=-2y+2\lambda=0\Rightarrow y=\lambda$

$L_\lambda=x+2y-3=0\Rightarrow -\frac{\lambda}{2}+2\lambda-3=0$

$\Rightarrow \frac{3\lambda}{2}=3$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=2}$

$\begin{aligned}x&=-1\\y&=2\end{aligned}\Rightarrow \boxed{(-1,2)\text{ kritik nokta}}$

Kısıta göre fonksiyon düzenlenirse: $f(x,y)=f(3-2y,y)=(3-2y)^2-y^2$

$=4y^2-12y+9-y^2=3(y-2)^2-3\geq -3$. O halde $(-1,2)$ mutlak min noktası

ve $f(-1,2)=-3$ verilen kısıta göre mutlak min değeri