5. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Oran testi uygularsak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

$$= 4$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 > 1$ olduğundan seri ıraksak

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$ serisinin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\text{ıraksak (p-testinden)}}$$ olduğundan mutlak yakınsak değildir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ için $b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ ve i) $b_n = \frac{1}{2\sqrt{n}-1} > 0$

ii) $\frac{1}{2\sqrt{n+1}-1} < \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ yani b_n azalan

iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} = 0$

olduğundan Alterne Seri Testi'nden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$ serisi yakınsaktır.

O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$ şartlı yakınsaktır (Kendi yakınsak fakat mutlak değeri alınmış hali ıraksak)

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

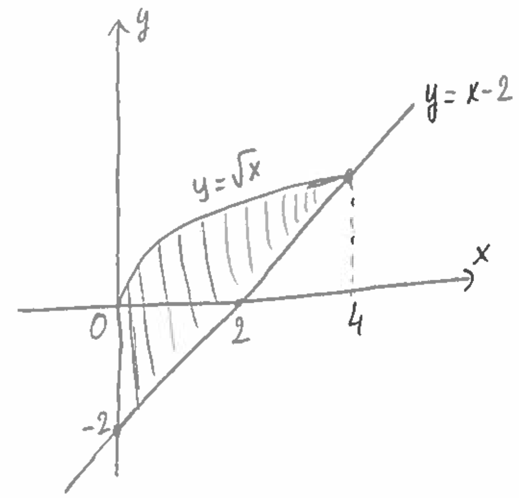
TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2018-2019 BAHAR DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, ARASINAV
23 ŞUBAT 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (20 p.)	4. (20 p.)	5. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$ ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.



$\sqrt{x} = x - 2$

$x = (x-2)^2$

$x = x^2 - 4x + 4$

$0 = x^2 - 5x + 4$

$0 = (x-1)(x-4)$

$\Rightarrow x = 4$

$$\text{Alan} = \int_0^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_0^4$$

$$= \frac{2}{3} 4^{3/2} - \frac{4^2}{2} + 2.4$$

$$= \frac{16}{3} - 8 + 8$$

$$= \frac{16}{3}$$

2. Bir şirketin $0 \le x \le 3000$ olmak üzere ayda x adet televizyon üretimine karşılık aylık marjinal karı $P'(x) = 150 - \frac{x}{10}$ eşitliği ile verilmiştir. Bu şirket şu anda aylık 100 adet üretim yapmaktadır. Üretimini ayda 1000 adet olacak biçimde artırırsa aylık karındaki değişim ne olur?

Aylık kârdaki değişim $= P(1000) - P(100)$

$$= \int_{100}^{1000} P'(x)\, dx$$

$$= \int_{100}^{1000} \left(150 - \frac{x}{10}\right) dx$$

$$= 150x - \frac{x^2}{20} \Big|_{100}^{1000}$$

$$= 150000 - 50000 - (15000 - 500)$$

$$= 85{,}500$$

3. (a) $\int_{-1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

Has olmayan integraldir çünkü $x=0$ tanımsızlık noktası integral sınırları içindedir. O halde

$$\int_{-1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \int_{0}^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$= \lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b} x^{-\frac{1}{3}}dx + \lim_{a\to 0^+}\int_{a}^{27} x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$= \lim_{b\to 0^-} \frac{3x^{2/3}}{2}\Big|_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0^+} \frac{3x^{2/3}}{2}\Big|_{a}^{27}$$

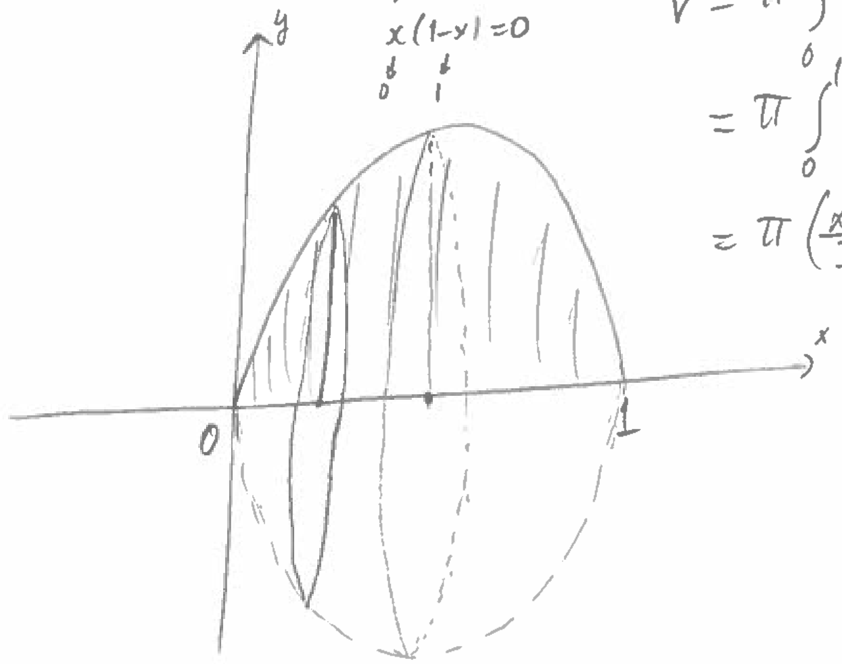
$$= \lim_{b\to 0^-} \frac{3b^{2/3}}{2} - \frac{3}{2} + \lim_{a\to 0^+} \frac{27}{2} - \frac{3a^{2/3}}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$$ (yakınsaktır)

(b) $y = x - x^2$ ve $y = 0$ ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

$x - x^2 = 0$

$x(1-x) = 0$

$0 \quad 1$



$$V = \pi \int_0^1 (x-x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 \, dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{10-15+6}{30}\right)$$

$$= \frac{\pi}{30}$$

4. (a) $xy' - y = 2x^2y$ diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$xy' = 2x^2y + y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y(2x^2+1)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2+1}{x}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln|y| = x^2 + \ln|x| + C$$

(b) $a_n = \sqrt[n]{n+1}$ olmak üzere (a_n) dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$a_n = (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

$$\ln(a_n) = \frac{1}{n}\ln(n+1) = \frac{\ln(n+1)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

Nokta nokta grafiğin türevi alınamaz

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği old L'Hospital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$$