Çözüm

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2017-2018 YAZ DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
05 AĞUSTOS 2018

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Adı Soyadı: No: İMZA:

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 120 dakikadır. Başarılar.

1. (a) **(6 p.)** $f(x,y) = xe^{\frac{y}{x}}$ fonksiyonu için f_{xx}, f_{yy} ve f_{xy} kısmi türevlerini bulunuz.

$f_x = e^{y/x} + e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right)x = e^{y/x} - \frac{e^{y/x}}{x}\cdot y$

$f_{xx} = e^{y/x}\left(\frac{-y}{x^2}\right) + e^{y/x}\cdot\frac{y}{x^3} + e^{y/x}\frac{y}{x^2}$

$f_{xy} = e^{y/x}\cdot\frac{1}{x} - e^{y/x}\frac{y}{x^2} - \frac{e^{y/x}}{x}$

$f_y = x\cdot e^{y/x}\cdot\frac{1}{x} = e^{y/x}$

$f_{yy} = e^{y/x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{e^{y/x}}{x}$

her bir kısmi türev için
f_x (1)
f_y (1)
f_{xx} (2)
f_{yy} (1)
f_{xy} (1)

(b) **(6 p.)** $z = f(x,y) = x^3y + \cancel{x}\cos y$, $x = s^2 + 2t$, $y = s - t^2$ olduğuna göre $(s,t) = (1,-1)$ noktasında $\frac{\partial z}{\partial s}$ ve $\frac{\partial z}{\partial t}$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

z_x (1)
x_s (1)
z_y (1)
y_s (1)

z
x y
s t s t

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$ (1)

$\frac{\partial z}{\partial s} = (3x^2y + \cos y)\cdot(2s) + (x^3 - x\sin y)\cdot(1)$

$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(1,-1)}$ (1)

$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(1,-1)}$ (1)

$\begin{cases} s = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(1,-1)} = (3\cdot 0 + 1)(2) + (-1)(1) = 1$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial z}{\partial t} = (3x^2y + \cos y)(2) + (x^3 - x\sin y)(-2t)$

$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(1,-1)} = (3\cdot 0 + 1)(2) + (-1)(2) = 0$

z_x z_y
x_t (1) y_t (1)

2. (a) **(8 p.)** $f(x) = e^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz. (Sadece ifadeyi yazmak tam puan alabilmek için yeterli değildir. İfade elde edilmelidir.)

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^n(x) &= e^x \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Maclaurin $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a=0}}$

$$\Rightarrow f^n(0) = e^0 = 1.$$

Öyleyse: e^x in Maclaurin açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot x^n}{n!}$$

(b) **(5 p.)** (a) da bulunan ifaden yararlanarak $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

$x \approx x^2$ yazarak sonuca ulaşırız.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}}$$

3. (a) (10 p.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n (x)^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 3|x|$$

$$3|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Uç noktaları kontrol edelim.

$\boxed{x=\frac{1}{3}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Alterne seri olup yakınsak.

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ ✓
- $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ✓
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ✓

$\boxed{x=-\frac{1}{3}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. $p=\frac{1}{2}<1$ olup ıraksak.

öyleyse yakınsaklık aralığı $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$

yarıçapı $R=\frac{1}{3}$

(b) (5p.) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n^2+1}$ serisinin yakınsak olup olmadığını bulunuz.

$u_n = \frac{1}{2n^2+1}$ olup.

- $\frac{1}{2n^2+1} > 0$ ✓
- $\frac{1}{2(n+1)^2+1} < \frac{1}{2n^2+1} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$ ✓
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2+1} = 0$ ✓

Alterne seri Testinden yakınsak.

4. **(12 p.)** $f(x,y) = $ ~~[illegible]~~ $2x^4+y^2-12xy$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun lokal ekstremum noktalarını bulup o noktaları (minimum, maksimum, semer) sınıflandırınız. ~~Fonksiyonun lokal minimum ve maksimum değerini hesaplayınız.~~

$$f_x = 8x^3 - 12y \qquad f_y = 2y - 12x$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8x^3 - 12y = 0 \\ 2y - 12x = 0 \end{array}\right\}$$ denk. sistemini çözelim

(2). denk. $y = 6x$ olup (1) denk. yerine yazalım

$$8x^3 - 72x = 0 \Rightarrow 8x(x^2-9) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\mp 3 \end{array}\right\}$$

$(0,0)$, $(-3,-18)$ ve $(3,18)$ noktalarını inceleyelim

$$f_{xx} = 24x^2 \qquad f_{xy} = -12 \qquad f_{yy} = 2$$

$$D(x,y) = 24 - 48x^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} D(0,0) = 24 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ semer noktası} \\ D(-3,-18) = 24 - 432 = -408 < 0 \Rightarrow (-3,-18) \text{ max} \\ D(3,18) = 24 - 432 = -408 < 0 \Rightarrow (3,18) \text{ max.} \end{array}\right.$$

$\cancel{54}$
$\cancel{24}$
$\cancel{7}$
6

5. (12 p.) Bir fabrikada iki tip traktör (x ve y) üretilmektedir. Fabrikanın günlük üretim kapasitesi toplam 8 adettir. ($x + y = 8$) Fabrikanın maliyet fonksiyonu $N(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ olduğuna göre fabrikanın minimum maliyetini ve bunu sağlayan x ile y değerlerini bulunuz.

Yan kısıt olduğu için Lagrange ile çözelim:

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(x+y-8)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2x - y + \lambda = 0 \\ F_y &= 4y - x + \lambda = 0 \\ F_\lambda &= x + y - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$$

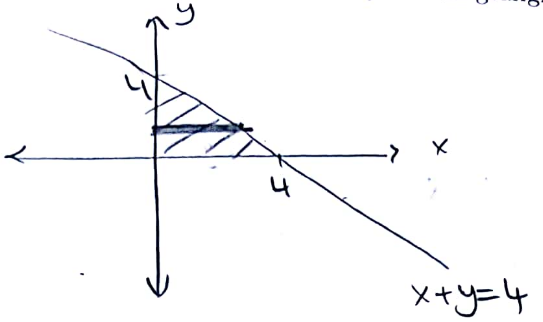
denklem sistemini çözelim.

$$\left.\begin{aligned} 7y + 3\lambda = 0 &\Rightarrow y = -\frac{3\lambda}{7} \\ 7x + 5\lambda = 0 &\Rightarrow x = -\frac{5\lambda}{7} \end{aligned}\right\} \quad -\frac{8\lambda}{7} - 8 = 0 \qquad \boxed{\lambda = -7}$$

$$\boxed{x = 5} \qquad \boxed{y = 3}$$

$$N(5,3) = 25 + 18 - 15 = 28$$

6. **(12 p.)** $f(x,y) = 5 - x - y$ ve R bölgesi $x + y = 4$, $y = 0$ ve $x = 0$ doğruları ile sınırlanan bölge olsun. R bölgesi üzerinde ve f fonksiyonunun grafiği altındaki hacmi bulunuz.



$$\int_0^4\int_0^{4-y}(5-x-y)\,dx\,dy = \int_0^4 5x-\frac{x^2}{2}-xy\,\Big|_{x=0}^{4-y} dy$$

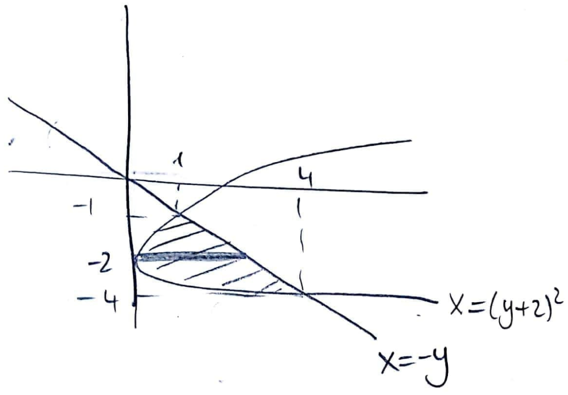
$$= \int_0^4 5(4-y) - \frac{(4-y)^2}{2} - (4-y)y \; dy$$

$$20 - 5y - \frac{16}{2} + \frac{8y}{2} - \cancel{\frac{y^2}{2}} - \cancel{4y} + \cancel{y^2}$$

$$= \int_0^4 12 - 5y + \frac{y^2}{2}\; dy = 12y - \frac{5y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\,\Big|_0^4$$

$$= 48 - 40 + \frac{64}{6} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$$

7. **(12 p.)** $x = (y+2)^2$ eğrisi ile $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını iki katlı integral yardımıyla bulunuz.



$$-y = (y+2)^2$$
$$-y = y^2+4y+4$$
$$y^2+5y+4=0$$
$$(y+4)(y+1)=0$$
$$\boxed{y=-4} \quad \boxed{y=-1}$$

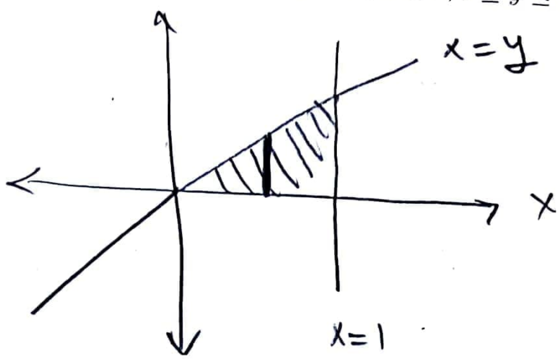
$$\int_{-4}^{-1}\int_{(y+2)^2}^{-y} 1.\,dx\,dy = \int_{-4}^{-1} x\Big]_{(y+2)^2}^{-y}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-4}^{-1} -y-(y+2)^2\,dy = \frac{-y^2}{2} - \left(\frac{y^3}{3} + \frac{4y^2}{2} + 4y\right)\Big|_{-4}^{-1}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{3} + 2 - 4\right)\right] - \left[-8 - \left(\frac{-64}{3} + \frac{64}{2} - 16\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \cancel{2} \cancel{+8} + \frac{64}{6} - \cancel{16} = \frac{67}{6} - 10 = \frac{7}{6}$$

8. **(12 p.)** $B=\{(x,y): y\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ olmak üzere $\iint_B \frac{xy}{1+x^4}dA$ integralini hesaplayınız



$$\int_0^1\int_0^x \frac{xy}{1+x^4}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2(1+x^4)}\,dx \underset{\substack{1+x^4=u \\ 4x^3dx=du}}{=} \int_1^2 \frac{du}{6u} = \frac{1}{6}\ln|u|\Big]_1^2$$

$$= \frac{\ln 2}{6}$$