CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2017-2018 YAZ DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, ARA SINAVI
01 TEMMUZ 2018

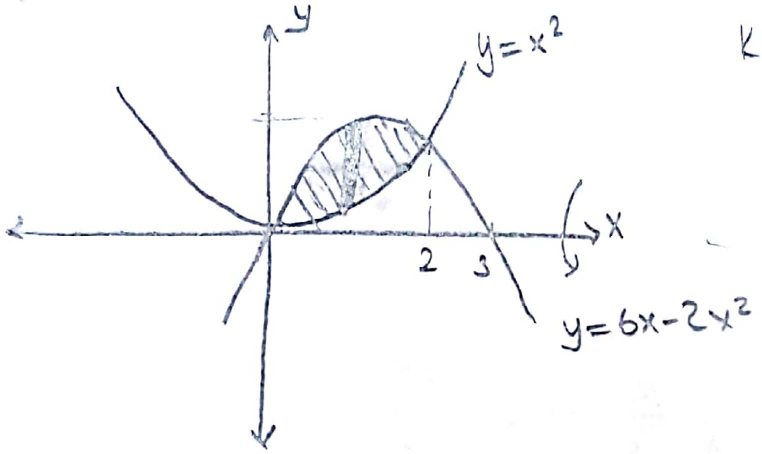
Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (15 p.)	2. (10+10+10 p.)	3. (10 p.)	4. (15 p.)	5. (15+15 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $y = 6x - 2x^2$ ve $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Önce bölgeyi belirleyelim:



Kesisim noktalarını bulalım.

$6x-2x^2 = x^2$

$3x.(2-x)=0$

$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=2}$

Disk metodu ile hacmi hesaplarsak:

$$H = \pi . \int_0^2 (6x-2x^2)^2 - (x^2)^2\, dx = \pi . \int_0^2 36x^2 - 24x^3 + 3x^4\, dx$$

$$= \pi . \left(\frac{36x^3}{3} - \frac{24x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{96\pi}{5}\, br^3$$

2. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{xlnx}dx$ genelleştirilmiş int. olup

$$= \lim_{t\to\infty} \int_{e}^{t} \frac{dx}{x.\ln x} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{\ln t} \frac{du}{u} = \lim_{t\to\infty} \ln|u| \Big|_{1}^{\ln t}$$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$= \lim_{t\to\infty} \{\ln|\ln t| - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln 1}}\} = \infty \Rightarrow \text{int. ıraksaktır.}$$

(b) $\int_{0}^{2} \frac{1}{(1-x)^4}dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(1-x)^4} dx + \int_{1}^{2} \frac{dx}{(1-x)^4}$

$$= \lim_{t\to1^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{(1-x)^4} + \lim_{t\to1^+} \int_{t}^{2} \frac{dx}{(1-x)^4}$$

$$= \lim_{t\to1^-} \frac{1}{3(1-x)^3} \Big|_{0}^{t} + \lim_{t\to1^+} \frac{1}{3(1-x)^3} \Big|_{t}^{2}$$

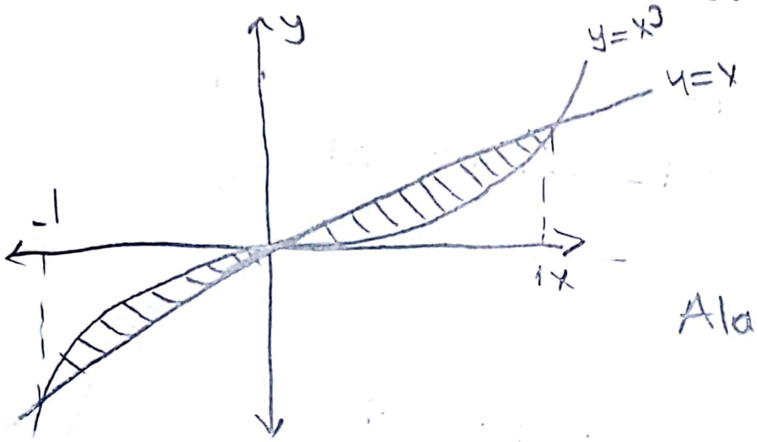
$$= \underbrace{\lim_{t\to1^-} \left(\frac{1}{3(1-t)^3} - \frac{1}{3}\right)}_{\infty} + \underbrace{\lim_{t\to1^+} \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3(1-t)^3}\right)}_{\infty} = \infty$$

(c) $\int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}dx$

$$\left.\begin{array}{l} 1+2e^{-x} = u \\ -2e^{-x}dx = du \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{1+2e}^{3} \frac{du}{-2u} = \frac{-1}{2} \ln|u| \Big|_{1+2e}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln 3 - \ln|1+2e|\right]$$

3. $y = x^3$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgeyi çizerek alanını hesaplayınız.



$x^3 = x \Rightarrow x(x^2-1) = 0$

$\boxed{x=0}\ \boxed{x=\mp 1}$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ br^2 //$$

4. $\underbrace{(xy + 3x + y + 3)dx + x^2dy}_{}\overset{=0}{}$ diferansiyel denkleminin $x = 1$ için $y = -4$ olacak biçimindeki çözümünü bulunuz.

$$(xy+3x+y+3)dx = -x^2dy$$

$$[x(y+3)+y+3]dx = -x^2dy$$

$$(y+3)(x+1)dx = -x^2dy$$

$$\frac{x+1}{x^2}dx = \frac{-1}{y+3}dy$$

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}dx = -\int \frac{1}{y+3}dy \Rightarrow \boxed{\ln|x| - \frac{1}{x} = -\ln|y+3| + C}$$

$x = 1$ ve $y=-4$ yerine koyalım: $\ln|1| - 1 = -\ln|-4+3| + C$

$$\boxed{-1 = C}$$

Öyleyse çözüm:

$$\boxed{\ln|x| - \frac{1}{x} = -\ln|y+3| - 1}$$

5. (a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{5^n}$ serisinin toplamını hesaplayınız.

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{5^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$ seklinde düsünelim. $a=\frac{1}{4}$ ve $r=\frac{2}{5}$ tir.

$|r| = \frac{2}{5} < 1$ old. seri yakınsaktır.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$ old. biliyoruz.

$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^0 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^1 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{5}{12} - \frac{11}{20} = \frac{8}{60}$ //

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz.

Oran testini kullanalım:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{e^{n+1}}} \cdot \frac{n^2 \cdot \cancel{e^n}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)\cdot e} = \infty > 1$

olup oran testinden ıraksaktır.