CEVAP ANAHTARI

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2017-2018 BAHAR DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
2 NİSAN 2018

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (15 p.)	2. (30 p.)	3. (20 p.)	4. (10 p.)	5. (10 p.)	6. (15 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını bulunuz. (10 puan)

$x=0$ nok. seri açılımı : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$

$f(x) = \cos x \quad , \quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \quad , \quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \quad , \quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x \quad , \quad f^{(4)}(0) = 1$

$$\cos x = f(0)\frac{x^0}{0!} + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(b) **(a)**'daki sonucu kullanarak, $f(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$ fonksiyonunun MacLaurin seri açılımını bulunuz. (5 puan)

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow \cos x = 2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1$

$\Rightarrow \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$

$\Rightarrow \cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right]$$

2. (a) $\int_1^e \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{xy} dydx$ integralini hesaplayınız. (15 puan)

$$= \int_1^e \left(\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{y} \, dy \right) dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \cdot \ln y \right) \Big|_{y=1}^{e^2} dx$$

$$= \int_1^e 2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln x = u \text{ olsun} & \\ \frac{1}{x} dx = du & \int 2u \, du = u^2 \end{array}}$$

$$= (\ln x)^2 \Big|_1^e = (\ln e)^2 - \underbrace{(\ln 1)^2}_{0} = 1$$

(b) Yerel ekstremum için ikinci türev testi kullanarak, $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 8y + 20$ fonksiyonunun lokal ekstremum değerlerini (varsa) bulunuz. (15 puan)

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x - 2y - 4 \\ f_y = -2x + 6y - 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 4x - 2y = 4 \\ -2x + 6y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

$(2,2)$ kritik noktadır.

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

$f_{xx} = 4$

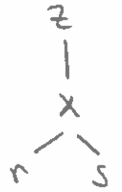
$f_{yy} = 6$

$f_{xy} = -2$

$D(2,2) = 4 \cdot 6 - (-2)^2 = 20 > 0$ ve $f_{xx}(2,2) = 4 > 0$

olduğundan $(2,2)$ noktası yerel minimumdur.

3. (a) $z = lnx - e^x$, $x = r - 2s$ olduğuna göre $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial s}$ türevlerini bulunuz. (10 puan)



$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} = \left(\frac{1}{x} - e^x\right) \cdot 1 = \frac{1}{r-2s} - e^{r-2s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = \left(\frac{1}{x} - e^x\right) \cdot (-2) = 2e^{r-2s} - \frac{2}{r-2s}$$

(b) $P(x, y) = x^3 lny + 4y^2 e^x$ fonksiyonu için $P_{xy}(-1, 1)$, $P_{xx}(-1, 1)$ kısmi türev değerlerini bulunuz. (10 puan)

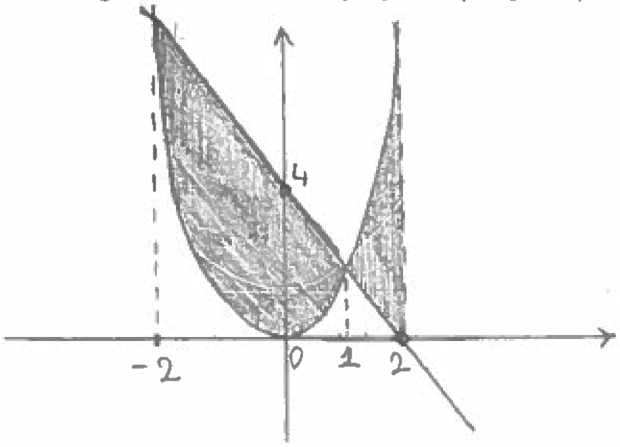
$$P_x = 3x^2 \ln y + 4y^2 e^x$$

$$P_y = \frac{x^3}{y} + 8y e^x$$

$$P_{xx} = 6x \ln y + 4y^2 e^x \Rightarrow P_{xx}(-1, 1) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$P_{xy} = \frac{3x^2}{y} + 8y e^x \Rightarrow P_{xy}(-1, 1) = 3 + 8e^{-1} = \frac{3e+8}{e}$$

4. $-2 \leq x \leq 2$ için $f(x) = 2x^2$ ve $g(x) = 4 - 2x$ eğrileri ile sınırlandırılmış bölgenin grafiğini çiziniz ve bu bölgenin alanını hesaplayınız.(10 puan)



ortak çözüm ile:

$$2x^2 = 4 - 2x$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = -2 \,, \quad x = 1$$

$$\text{Alan} = \int_{-2}^{1} [4 - 2x - 2x^2]\, dx + \int_{1}^{2} [2x^2 - 4 + 2x]\, dx$$

$$= \left(4x - x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} + \left(\frac{2x^3}{3} - 4x + x^2\right)\Big|_{x=1}^{2}$$

$$= 9 + \frac{11}{3}$$

$$= \frac{38}{3}$$

II. YOL: Eğriler arasında kalan alanı iki katlı integral yardımıyla:

$$\text{Alan} = \int_{x=-2}^{1} \int_{2x^2}^{4-2x} dy\, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{4-2x}^{2x^2} dy\, dx = \frac{38}{3}$$

5.

x	y	ax+b	fark
1	8	a+b	8-a-b
2	5	2a+b	5-2a-b
3	4	3a+b	4-3a-b
4	0	4a+b	-4a-b

Yukarıdaki tablo için en küçük kareler doğrusunu bulunuz ve bunu kullanarak x=2 için y nin yaklaşık değerini hesaplayınız.(10 puan)

$y = ax+b$ şeklinde bir doğru bulacağız.

$$F(a,b) = (8-a-b)^2 + (5-2a-b)^2 + (4-3a-b)^2 + (-4a-b)^2$$

$$\begin{cases} F_a(a,b) = -2(8-a-b) - 4(5-2a-b) - 6(4-3a-b) - 8(-4a-b) \\ F_b(a,b) = -2(8-a-b) - 2(5-2a-b) - 2(4-3a-b) - 2(-4a-b) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_a = -60 + 60a + 20b = 0 \\ F_b = -34 + 20a + 8b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -5/2 \\ b = 21/2 \end{array}$$

$F_{aa} = 60$, $F_{bb} = 8$, $F_{ab} = 20$

$D = 60.8 - 20^2 = 80 > 0$ ve $F_{aa} = 60 > 0$ olduğundan

$\left(-5/2, 21/2\right)$ nok. minimum.

O halde istenilen doğru $y = \frac{-5x}{2} + \frac{21}{2}$

$x = 2$ için $y = \frac{-5.2}{2} + \frac{21}{2} = \frac{11}{2}$ olur.

6. Bir firmanın işgücü ve hammadde için aylık bütçesi 60.000 tl dir. Eğer firma işgücü için x **bin tl** ve hammadde için y **bin tl** harcarsa, N ile gösterilen aylık üretim miktarı, $N(x, y) = 4xy - 8x$ eşitliği ile belirlenmiştir. Aylık üretim miktarını maksimum yapmak için bütçe, işgücü ve hammadde harcamalarına nasıl dağıtılmalıdır? N'nin maksimum değerini bulunuz. (15 puan)

$$x+y=60 \implies g(x,y) = x+y-60$$

O halde Lagrange Çarpanları yönteminden,

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$
$$= 4xy - 8x + \lambda(x+y-60)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 4y-8+\lambda = 0 \\ F_y &= 4x+\lambda = 0 \\ F_\lambda &= x+y-60 = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \frac{8-\lambda}{4}, \quad x = -\frac{\lambda}{4}$$

$$y = 2 + x$$

F_λ' da yerine yazarsak

$$F_\lambda = x + x + 2 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x = 29$$
$$y = 31$$

$(29,31)$ N'yi maksimum yapan noktadır.

$N(29,31) = 3364$ bin TL