— CEVAP ANAHTARI —

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ

MAT 104 - GENEL MATEMATİK II — AD SOYAD:

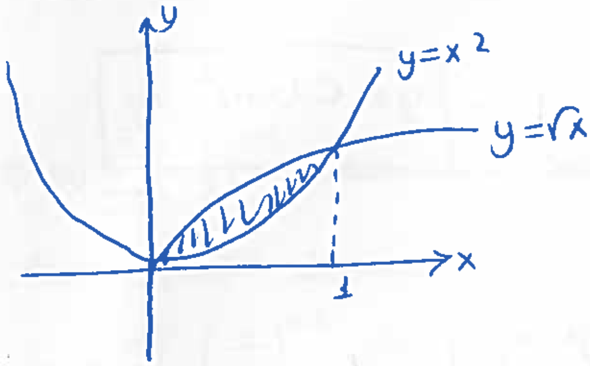
2017 YAZ DÖNEMİ - ARA SINAV — ÖĞR. NO.:

30 HAZİRAN 2017, SINAV SÜRESİ 120 DAKİKA — İMZA:

1. (20 PUAN)	2. (20 PUAN)	3. (20 PUAN)	4. (20 PUAN)	5. (20 PUAN)	TOPLAM

TAM PUAN ALMAK İÇİN ÇÖZÜMLERİNİZDE YETERLİ AÇIKLAMA YAPMANIZ GEREKMEKTEDİR.

1) a) $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

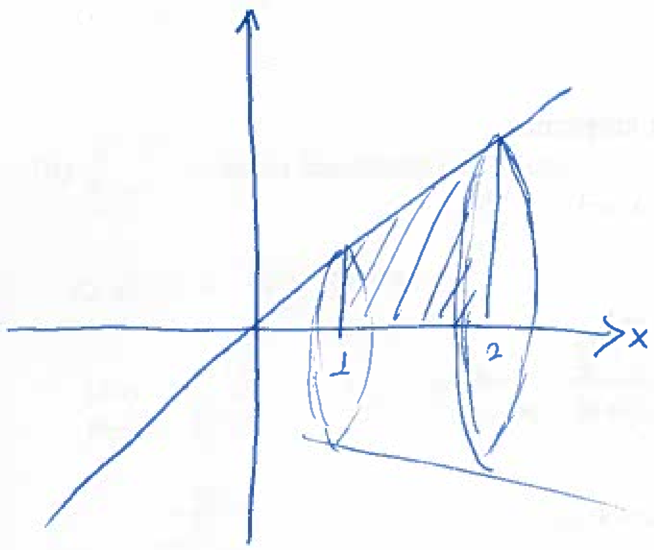


$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3} \text{ br}^2$$

b) $y = x$, $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları ile x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



$$V = \pi \int_1^2 x^2\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right) = \frac{\pi}{3}(8-1) = \frac{7\pi}{3} \text{ br}^3$$

2) a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+1}{x+1}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{2y+1} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{2y+1} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2y+1) = \ln(x+1) + \ln c_1$$

$$\Rightarrow 2y+1 = c_1^2(x+1)^2 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[c_1^2(x+1)^2 - 1\right] \Rightarrow \boxed{y = C(x+1)^2 - \frac{1}{2}}$$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ has olmayan integralini hesaplayınız.

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\Big|_1^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

3) a) $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ olmak üzere (a_n) dizisinin yakınsaklığını araştırınız.

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n+1}{n+3} - \dfrac{n}{n+2} > 0$ monoton artan ve

$\forall n$ için $\dfrac{n}{n+2} < 1$ olup üstten sınırlıdır.

O halde dizi yakınsaktır.

b) $b_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ ile tanımlanan dizinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \qquad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

4) (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ serisinin toplamını bulunuz.

Kısmi toplamlar dizisinden

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \text{ olup düzenlersek } S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^k}{1-(-1/2)} \text{ olup}$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{-1}{3} \text{ dür.}$$

$\left|\frac{-1}{2}\right| < 1$ olduğundan

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ serisinin karakterini belirtiniz.

Oran testi uygulayalım

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}\cdot 3}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}} = 0 < 1 \text{ dir.}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ serisi yakınsaktır.

5) (a) $f(x) = e^{x/2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

1. yol

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olup x yerine $\frac{x}{2}$ yazarsak; $e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$

2. yol

$f(x) = e^{x/2}$ $f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ $f'(0) = 1/2$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{x/2}$ $f''(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{x/2}$ $f'''(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\vdots$

olup buradan $e^{x/2} = 1 + \frac{x}{2.1!} + \frac{x^2}{2^2 2!} + \cdots$

$e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Kök testi yapalım.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^n}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x-1}{3}\right| = \frac{|x-1|}{3} < 1$ olmalı

$|x-1| < 3$ olup $R = 3$ tür.

$-2 < x < 4$ aralığında yakınsaktır. Şimdi sınırları inceleyelim.

$x = -2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ıraksak alterne serisi elde edilir.

$x = 4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n$ (ıraksak pozitif terimli seri elde edilir.

Buradan yakınsaklık aralığı $(-2, 4)$