MAT 104 - FİNAL CEVAP ANAHTARI

TOBB ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ

MAT 104 - GENEL MATEMATİK II — AD SOYAD:

2017 YAZ DÖNEMİ - FİNAL SINAVI — ÖĞR. NO.:

16 AĞUSTOS 2017, SINAV SÜRESİ 110 DAKİKA — İMZA:

1. (20 PUAN)	2. (20 PUAN)	3. (20 PUAN)	4. (20 PUAN)	5. (20 PUAN)	TOPLAM

TAM PUAN ALMAK İÇİN ÇÖZÜMLERİNİZDE YETERLİ AÇIKLAMA YAPMANIZ GEREKMEKTEDİR.

1) a) $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

1. yol

$f(x) = xe^x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x = (x+2)e^x$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = 3e^x + xe^x = (x+3)e^x$ $\qquad f'''(0) = 3$

$\vdots$

Maclaurin Formülü

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$xe^x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \dots = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

2. yol

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğundan $\quad x \cdot e^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

e^x fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-2)^n}{n^2+1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$\frac{(2x-2)^n}{n^2+1} = a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{(2x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \cdot 2x-2\right| = |2x-2|$$

oran testi gereğince $|2x-2| < 1$ ise yakınsaktır.

$|2x-2| < 1$

$2|x-1| < 1$

$|x-1| < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}}$

$*$ $x = \frac{1}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ Mutlak yakınsaklıktan yakınsaktır.

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1} < \infty$

$*$ $x = \frac{3}{2}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$ old ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yak. old. seri yakınsak.

Yakınsaklık yarıçapı $= \frac{1}{2}$

〃 aralığı $= \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

2) a) $f(x,y) = xy^2 + e^{y/x}$ fonksiyonunun f_x, f_y ve f_{xy} kısmi türevlerini bulunuz.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = y^2 - e^{y/x} \cdot \frac{y}{x^2}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 2y + e^{y/x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 2y + e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2y - e^{y/x} \cdot \frac{y}{x^3}$$

b) $\cancel{\frac{dx}{dy}}\ \frac{dy}{dx} = xy$ diferensiyel denkleminin ~~$y(0) = 1$~~ $y(1)=0$ şartını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln c = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \boxed{y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$ Genel çözüm

$y(0) = 1$ koşuluna göre $x=0 \Rightarrow y=1$

$$1 = c \cdot e^{\frac{0}{2}} \Rightarrow \boxed{1 = c}$$

$$\boxed{y = e^{x^2/2}}$$ özel çözüm.

3) a) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 2y^3 + 6xy$ fonksiyonunun yerel extremum noktalarını bulunuz ve extrem değerlerini hesaplayınız.

$f_x = 6x + 6y = 0$ $\boxed{x = -y}$

$f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0$

$6y - 6y^2 - 6y = 0$

$-6y^2 = 0$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_{xx} = 6$

$f_{yy} = 6 - 12y$ $f_{yy}(0,0) = 6$

$f_{xy} = 6$

$(0,0) \to$ Kritik nokta.

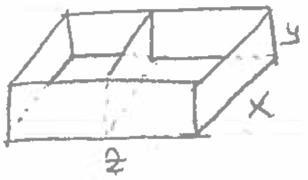
$D = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0)$

$= 6 \cdot 6 - 36 = 0$

$D = 0$ çıktığı için extremum noktası hakkında yorum yapamayız.

Test çalışmaz.

b) Hacmi 48 cm^3 olan, üstü açık ve iki bölmeli dikdörtgen prizma şeklinde karton bir kutu yapmak istiyoruz. Bu kutuyu yapmak için en az (minimum) kaç cm^2 kartona ihtiyaç vardır.



$x.y.z = 48$

$z = \frac{48}{xy}$

Alan $= 3xy + 2y.z + xz = A(x,y,z)$

$f(x,y) = 3xy + \frac{2.48}{x} + \frac{48}{y}$

$f_x = 3y - \frac{2.48}{x^2} = 0 \Rightarrow 3y = \frac{2.48}{x^2}$

$y = \frac{2.16}{x^2}$

$f_y = 3x - \frac{48}{y^2} = 0$

$\Leftarrow$

$3x - \frac{48}{\left(\frac{2.16}{x^2}\right)^2} = 0 \Rightarrow 3x - \frac{\overset{3}{48}.x^4}{4.16.16} = 0 \Rightarrow 3(4^3.x - x^4) = 0$

$3x(4^3 - x^3) = 0$

$x \neq 0$ $\boxed{x = 4}$

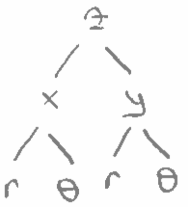
$x = 4 \Rightarrow y = \frac{2.16}{4^2} = 2 \Rightarrow z = \frac{48}{2.4} = 6$

Alan $= A(x,y,z) = A(4,2,6)$

$= 3.4.2 + 2.2.6 + 4.6$

$= 24 + 24 + 24 = \boxed{72}$

4) **(a)** $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ ve $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ise zincir kuralını kullanarak z_r ve z_θ kısmi türevlerini hesaplayınız.



$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$

$= 2x.\cos\theta + 2y.\sin\theta = 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta$ //

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \theta}$

$= 2x.r(-\sin\theta) + 2y.r.\cos\theta$

$= -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r^2.\sin\theta.\cos\theta$ //

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki limitini araştırınız.

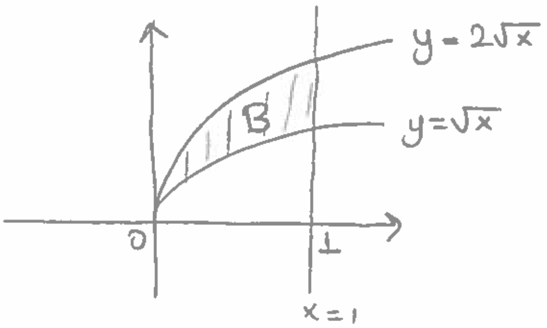
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ limitini hesaplamak için $x=y$ doğrusu ile ve x_ekseni doğrultusunda yaklaşalım.

$x=y$ doğrusu ile $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x.x}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ $\neq$

x_ekseni ile (y=0 demek) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x.0}{x^2+0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

iki limit eşit olmadığından limit mevcut değil. //

5) (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ eğrileri ve $x = 1$ doğrusu ile sınırlanan bölge B ise $\iint_B y\,dA$ integralini hesaplayınız.

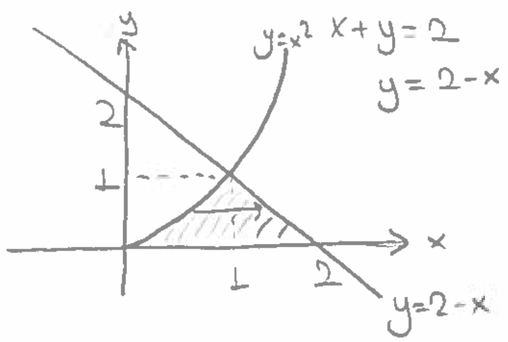


$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} y \, dy\, dx = \int_0^1 \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4x}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{3x}{2} dx = \left. \frac{3x^2}{4} \right|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4} \ //$$

(b) $y = x^2$ parabolünün sağ yarısı, $x + y = 2$ doğrusu ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını iki katlı integral yardımıyla hesaplayınız.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} dx\, dy = \int_0^1 \left. x \right|_{x=\sqrt{y}}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y})\, dy$$

$$= \left. 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^{3/2}}{3/2} \right|_{y=0}^{1}$$

$$= \frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 0 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{5}{6} \ //$$

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 1$$