

Adı ve Soyadı:

Cevap Anahtarı

08 Aralık 2018

Bölümü:

No:

İmza:

1	2	3	4	5	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- DÖNEM SONU SINAVI
(SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR)

1) (a) $f(x) = \begin{cases} ax - b, & x < 1 \text{ ise} \\ 6, & x = 1 \text{ ise} \\ 2ax^2 + b, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonunun tüm reel eksende sürekli olabilmesi için a ve b sayıları kaç olmalıdır? [10 Puan]

$$f(1) = 6 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - b = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2a + b = 6$$

$$\underline{3a = 12 \Rightarrow a = 4, b = -2}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ limitini araştırınız. [10 Puan]

$\frac{0}{0}$ belirgili ver. L'Hôpital uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

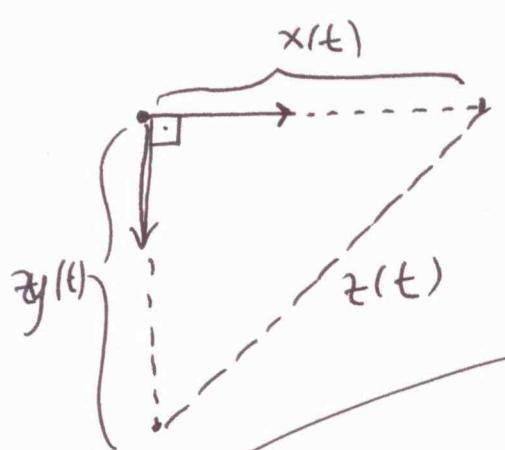
2) (a) $f(x) = x^{\sin x}$ ise $f'(x) = ?$ [10 Puan]

$$f(x) = x^{\sin x} \Rightarrow \ln(f(x)) = \sin x \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{\sin x} \left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

- (b) Motorlu iki kayak, biri doğu diğeri de güney yönünde olmak üzere aynı yerden, aynı anda hareket ediyorlar. Doğu gidenin hızı saatte 15 km, güneye gidenin hızı ise saatte 20 km olduğuna göre, hareketlerinden 4 saat sonra kayıklar arasındaki uzaklığın (zamana göre) değişim oranını bulunuz. [10 Puan]



$$x'(t) = 15 \text{ ve } y'(t) = 20 \\ \text{olduğu belliyor.}$$

$$t=4 \Rightarrow x(t) = 60$$

$$t=4 \Rightarrow y(t) = 80$$

$$t=4 \Rightarrow z(t) = 100$$

$$(z(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2 \text{ oldugundan her ikisi yanin} + ye göre türevini alırsak$$

$$2z(t)z'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

$$t=4 \text{ iken} \Rightarrow 100 \cdot z'(t) = 60 \cdot 15 + 80 \cdot 20$$

$$10z'(t) = 90 + 160 \Rightarrow z'(t) = 25$$

yani $t=4$ oldugunda iki kayak arasındaki mesafe saatte 25 km hızla artar.

- 3) (a) Yıllık %10 sürekli bileşik faiz oraniyla bir bankaya yatırılan para, kaç yıl sonra 5 katına ulaşır? ($\ln 5 \approx 1,6$ alınız) [10 Puan]

$$5P = Pe^{rt} \text{ olduğundan.}$$

$$\Rightarrow e^{rt} = 5 \Rightarrow rt = \ln 5 \approx 1,6$$

$$r = \frac{10}{100} = 0,1 \Rightarrow t \approx \frac{1,6}{0,1} = 16 \text{ yıl.}$$

- (b) Bir firmanın ayda x adet dolma kalemleri üretemesi durumunda aylık sabit maliyetinin 3000 TL ve ürün başına maliyetinin ise 20 TL olduğu biliniyor. Bir dolma kaleminin satış fiyatı $p(x) = 200 - \frac{x}{10}$ ($0 \leq x \leq 2000$) TL olduğuna göre firmanın maksimum kâr elde edebilmesi için ayda kaç adet dolma kalem üretemelidir? Bu durumda maksimum kâr, kaç TL olur? [10 Puan]

$$M(x) = 3000 + 20x \quad (\text{Maliyet})$$

$$p(x) = 200 - \frac{x}{10} \quad (0 \leq x \leq 2000) \quad (\text{Kalemin satış fiyatı})$$

$$G(x) = x p(x) = 200x - \frac{x^2}{10} \quad (\text{Gelir})$$

$$K(x) = G(x) - M(x) = 180x - \frac{x^2}{10} - 3000 \quad (\text{Kâr})$$

$$K'(x) = 180 - \frac{x}{5} \Rightarrow \boxed{x = 900 \text{ adet}} \quad (\text{kritik nokta})$$

$$K''(x) = -\frac{1}{5} \Rightarrow K''(900) = -\frac{1}{5} < 0$$

$\Rightarrow x = 900$ makimum yapan noletadır.

$$K(900) = 180 \cdot 900 - 81000 - 3000$$

$$= 78.000 \text{ TL} \quad (\text{makimum kâr})$$

4) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x}$ [10 Puan]

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} \quad \parallel \quad \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du \\ &= \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C \\ &= \arctan(\sin x) + C \end{aligned}$$

(b) $\int e^{2x} \sqrt{1+e^x} dx$ [10 Puan]

$$\begin{aligned} &= \int e^x \cdot \sqrt{1+e^x} e^x dx \quad \parallel \quad 1+e^x = u \Rightarrow e^x dx = du \\ &\quad (e^x = u-1) \\ &= \int (u-1) \sqrt{u} du \\ &= \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5} (1+e^x)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+e^x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

(c) $\int \ln(x^x) dx$ [10 Puan]

$$\begin{aligned} &= \int x \ln x dx \quad \parallel \quad \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ &\quad x dx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$= uv - \int v du$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

- 5) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ fonksiyonunun grafiğini tüm adımları inceleyerek çiziniz (asimptotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları, ekstremum noktalarını, konkavlık durumunu dikkate alınır).
[15 Puan]

① $T = \mathbb{R}$ (Her yerde tanımlı)

$$x=0 \Rightarrow y=4$$

~~$y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$~~

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 6x^2 + 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 6x^2 + 4) = -\infty$$

yatay ve dikey asimptot yok.

② $f'(x) = 6x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x=0, x=2$ kritik noktalar.

③ $f''(x) = 12x - 12 = 0 \Rightarrow x=1$ büküm noktaları.

