Adı ve Soyadı: **29 Aralık 2016**

Bölümü:

No:

İmza:

ÇÖZÜMLER

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- DÖNEM SONU SINAV SORULARI

(SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR)

1) (a) $\ln(x^2 y) = y^2 + x$ denklemiyle kapalı olarak belirtilen $y = f(x)$ eğrisinin türevini bulunuz. **[12 Puan]**

ÇÖZÜM: **1. Yol**

Verilen denklemde her iki yanın x e göre türevini alırsak:

$$\frac{2xy + x^2 y'}{x^2 y} = 2yy' + 1$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{1}{y} - 2y\right) = 1 - \frac{2y}{xy}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{xy - 2y}{xy}\right)\left(\frac{y}{1 - 2y^2}\right)$$

$$= \frac{xy - 2y}{x(1 - 2y^2)}$$

bulunur.

2. Yol

$$F(x,y) = \ln(x^2 y) - y^2 - x = 0$$

fonksiyonunu göz önüne alırsak,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

$$= -\frac{\left(\frac{2xy}{x^2 y}\right) - 1}{\left(\frac{x^2}{x^2 y}\right) - 2y}$$

$$= -\frac{\left(\frac{2}{x}\right) - 1}{\left(\frac{1}{y}\right) - 2y}$$

$$= \frac{xy - 2y}{x(1 - 2y^2)}$$

olur.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - 3\sin x}{x^2}$ limitini hesaplayınız. **[13 Puan]**

ÇÖZÜM: 0/0 belirsizliği olduğundan L'Hospital kuralını kullanabiliriz. Buna göre

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 3\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3 - 3\cos x}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

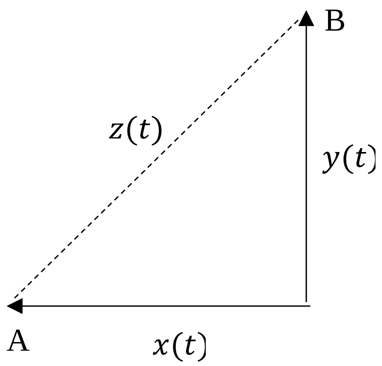
$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\sin x}{2} = 0$$

elde edilir.

yeniden L'Hospital kuralı uygulandı

2) **(a)** İki bisikletli aynı anda aynı noktadan biri 20 km/saat sabit hızla batıya doğru, diğeri 15 km/saat sabit hızla kuzeye doğru hareket ediyor. 2 saat sonra bu bisikletlilerin aralarındaki mesafenin değişme hızını hesaplayınız. **[12 Puan]**

ÇÖZÜM:



Şekildeki gibi batıya giden A bisikletlisinin *t* saatte gittiği yolu $x(t)$, kuzeye giden B bisikletlisinin *t* saatte gittiği yolu $y(t)$ ve iki bisikletlinin *t* saatte arasındaki mesafeyi de $z(t)$ ile gösterelim. Soruda verilen bilgilerden herhangi bir *t* anında $x'(t) = 20$ ve $y'(t) = 15$ olduğu biliniyor. Şimdi $t = t_0 = 2$ anında $x(2) = 40,\ y(2) = 30$ olduğundan dik üçgenden yararlanarak $z(2) = 50$ bulunur. Buna göre

$$\left(z(t)\right)^2 = \left(x(t)\right)^2 + \left(y(t)\right)^2$$

ifadesinde her iki tarafın *t* ye göre türevini alırsak

$$2z(t)z'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla $t = t_0 = 2$ anında

$$50z'(t_0) = 40 \cdot 20 + 30 \cdot 15 \Rightarrow z'(t_0) = 25\ km/saat$$

olur; yani iki bisikletli arasındaki mesafe $t = t_0 = 2$ anında saatte 25 km hızında artmaktadır.

(b) Bir yüzme havuzu, zararlı bakterilerin yok edilmesi için periyodik olarak ilaçlanmaktadır. İlaçlama yapıldıktan t gün sonra havuz suyunun her cm^3 ünde $C(t) = 30t^2 - 240t + 500$ $(0 \le t \le 8)$ miktarında bakteri görülmektedir. Havuzdaki bakteri sayısı ilaçlama yapıldıktan kaç gün sonra minimum olur? **[13 Puan]**

ÇÖZÜM. Fonksiyonun kritik noktalardaki ve uç noktalardaki değerleri hesaplanmalıdır. O halde

$$C'(t) = 60t - 240 = 0 \Rightarrow t = 4 \in [0,8]$$

tek kritik nokta olup $C(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 500 = 20$ bulunur. Ayrıca uç nokta değerleri de $C(0) = 500$ ve $C(8) = 30 \cdot 8^2 - 240 \cdot 8 + 500 = 500$ olduğundan dolayı $C(4) = 20$ minimum bakteri sayısıdır; yani ilaçlama yapıldıktan 4 gün sonra bakteri sayısı minimuma ulaşır.

3) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int x^3 \ln x\, dx$ **[10 Puan]**

ÇÖZÜM. Kısmi integrasyon yöntemi uygulanmalıdır. Buna göre

$$u = lnx \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \text{ ve } dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$$

değişkenleri yardımıyla

$$\int x^3 lnx dx = uv - \int v du$$

$$= (lnx)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^4 lnx}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

bulunur.

(b) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ **[10 Puan]**

ÇÖZÜM. $\sqrt{x} = u$ değişken değiştirmesi kullanılırsa

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$$

olacağından

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \cos u\, du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

elde edilir.

(c) $\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)(x+2)} dx$ **[10 Puan]**

ÇÖZÜM. Basit kesirlere ayırma yönteminden yararlanacağız. Buna göre

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 2}$$

ifadesinde, paydalar eşitlenirse

$$x^2 - x - 1 \equiv (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B = -1 \\ 2B + C = -1 \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = -1, C = 1$$

olup buradan

$$\int \frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)(x+2)} dx = -\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -arctanx + ln|x + 2| + C$$

elde edilir.

4) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f nin tanım kümesini, eksenleri kestiği noktaları ve asimtotlarını bulunuz. **[5 Puan]**

ÇÖZÜM: $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ (f nin tanım kümesi) ve $x=0 \Leftrightarrow y=0$, yani grafik orijinden geçer.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x}{x+1}=1 \Rightarrow y=1 \; yatay\ asimtot\ ve$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x+1}=+\infty \quad ve \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x+1}=-\infty \Rightarrow x=-1 \;\; düşey\ asimptot.$$

(b) f nin (varsa) kritik noktalarını bulunuz ve artan-azalan olduğu aralıkları belirleyiniz. **[5 Puan]**

ÇÖZÜM:

$$f'(\mathrm{x})=\frac{1}{(\mathrm{x}+1)^2}>0 \quad (x\neq-1)$$

olduğundan f nin kritik noktası yoktur ve tanım kümesi üzerinde artandır.

(c) f nin (varsa) büküm noktalarını bulunuz ve konkavlık durumunu belirleyiniz. **[5 Puan]**

ÇÖZÜM:

$$f''(\mathrm{x})=-\frac{2}{(\mathrm{x}+1)^3} \quad (x\neq-1)$$

olduğundan f nin büküm noktası yoktur. $x<-1$ için f nin grafiği yukarı konkav ve $x>-1$ için f nin grafiği aşağı konkavdır.

(d) Yukarıdaki tüm durumları içeren değişim tablosunu oluşturunuz. **[5 Puan]**

ÇÖZÜM:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+++$	‖	$+++$		$+++$	
$f''(x)$		$+++$	‖	$---$		$---$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	1

(e) f nin grafiğini çiziniz. **[5 Puan]**

ÇÖZÜM: