

Adı ve Soyadı:

06 Kasım 2016

Bölümü:

No:

İmza:

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- ARASINAV SORULARI

(SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR)

- 1) (a) $\left| \frac{1}{x} - 2 \right| < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz. [12 Puan]

ÇÖZÜM: Mutlak değer özelliğinden ($x \neq 0$ olmak üzere)

$$-1 < \frac{1}{x} - 2 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 3$$

olur. Burada x lerin pozitif olması gerekeceğinden

$$\frac{1}{3} < x < 1$$

elde edilir; yani çözüm kümesi: $\left(\frac{1}{3}, 1 \right)$ açık aralıktır.

- (b) $f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. [13 Puan]

ÇÖZÜM: Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için

$$\frac{5-x}{x+2} \geq 0 \text{ ve } x \neq -2$$

olmalıdır. Burada aşağıdaki gibi işaret değişim tablosu incelenebilir:

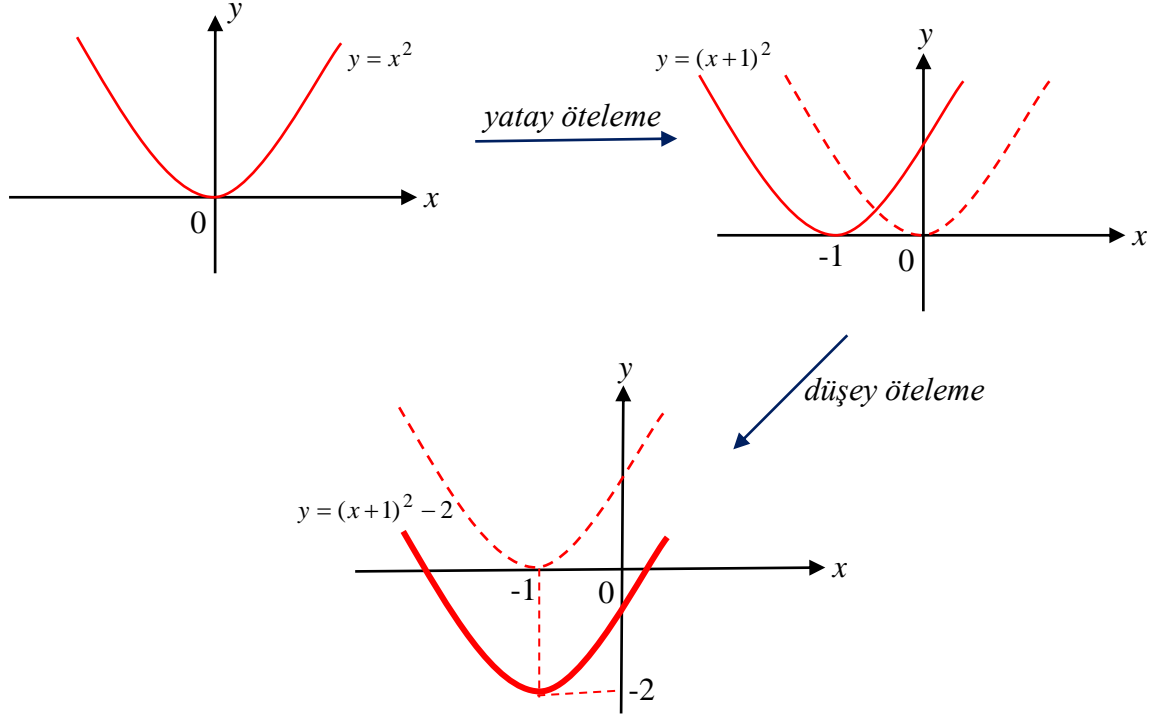
	-2	5
$5-x$	+++	+++
$x+2$	---	+++
$\frac{5-x}{x+2}$	---	+++

Dolayısıyla, fonksiyonun tanım kümesi: $[-2, 5]$ aralıktır.

2) (a) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ fonksiyonunun grafiğini $y = x^2$ nin grafiğinden yararlanarak çiziniz.

[12 Puan]

ÇÖZÜM: $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini önce x -ekseni üzerinde yatay olarak sola doğru 1 birim öteliz; sonra da grafiği y -ekseni üzerinde 2 birim düşey olarak aşağı yönde kaydırırız. Buna göre elde edilen grafikler şu şekilde olur:



(b) 8000 TL, %6 faiz oranıyla iki ayda bir birleştirilmek üzere 5 yıl süreyle bankaya yatırılmıştır.

Sürenin sonundaki para miktarını bulunuz. [13 Puan]

ÇÖZÜM: Problemden verilenlere göre

$$P = 8000, r = \frac{6}{100}, m = 6, t = 5$$

olup bu değerleri

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}$$

formülünde yerine yazacak olursak

$$A = 8000 \left(1 + \frac{1}{100} \right)^{30} = 8000 \left(\frac{101}{100} \right)^{30} \text{ TL}$$

bulunur.

- 3) (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız. [12 Puan]

ÇÖZÜM: Öncelikle 3 noktasındaki sağ ve sol limitlerine bakmalıyız. Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

ve

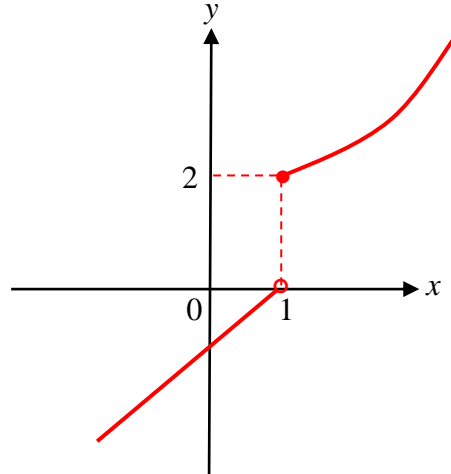
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

olup bu iki değer farklı çıktığından $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ limiti mevcut değildir.

- (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \text{ ise} \\ x - 1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çizin ve $x = 1$ de sürekli olup olmadığını araştırınız. [13 Puan]

ÇÖZÜM: Önce fonksiyonun grafiğini çizelim.



Fonksiyonun tanımından $f(1) = 2$ olduğu görülmektedir. Şimdi $x = 1$ de sağ ve sol limitlerini inceleyelim.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limiti mevcut olmayıp f fonksiyonu $x = 1$ de sürekli değildir.

4) (a) $f(x) = \sqrt{2x-1} + (x^2 + 3x + 1)^5$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız. [8 Puan]

ÇÖZÜM: Toplam ve bileşke fonksiyonun türevlerini uygularsak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} + 5(x^2 + 3x + 1)^4 (2x + 3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^4 \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $f(x) = \sin(\ln x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x_0 = 1$ apsisi noktasındaki teğetin denklemini bulunuz. [8 Puan]

ÇÖZÜM: $x_0 = 1$ ise $y_0 = \sin(\ln 1) = 0$ olur; yani $(1, 0)$ noktasından çizilen teğeti arıyoruz.

Burada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

olacağından, söz konusu teğetin eğimi:

$$m = f'(1) = \cos(\ln 1) = 1$$

bulunur. Dolayısıyla teğet denklemi:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = x - 1$$

olarak elde edilir.

(c) $x^2 y + y^3 e^x - 5 = 0$ denklemiyle kapalı olarak belirtilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz. [9 Puan]

ÇÖZÜM: Kapalı fonksiyonun türevinden yararlanarak, verilen denklemin her iki yanında x e göre türev aldığımızda

$$2xy + x^2 y' + 3y^2 y' e^x + y^3 e^x = 0$$

bulunur. Son denklemden y' çekilirse

$$(x^2 + 3y^2 e^x) y' = -2xy - y^3 e^x$$

olup buradan

$$y' = \frac{-2xy - y^3 e^x}{x^2 + 3y^2 e^x}$$

elde edilir.