

Adı ve Soyadı:

14 Aralık 2013

No:

İmza:

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I
DÖNEM SONU SINAVI

- 1) (a) $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \text{ ise} \\ e^x, & x \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız. [13 Puan]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x) = 1$$

← bu iki değer farklı
çıklığında $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ yoktur!

- (b) $g(x) = x^3 \sin^2(x+1)$ ise $\frac{dg}{dx} = g'(x) = ?$ [12 Puan]

Zincir kuralından

$$g'(x) = 3x^2 \sin^2(x+1) + 2x^3 \sin(x+1) \cos(x+1)$$

bulunur.

- 2) (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ fonksiyonunun grafiğine $x=1$ apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi bulunuz. [12 Puan]

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \quad \text{olup}$$

$$m = f'(1) = -1 \quad (\text{teğetin eğimi})$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=2$$

O halde eğimi $m=-1$ olan ve $(1, 2)$ noktasından geçen teğet doğrusu denklemi:

$$y-2 = -1(x-1) \Rightarrow y = -x + 3 \quad \text{olur.}$$

- (b) Bir şehirde x yılın sonundaki seçmen sayısı (bin kişi olarak) $N(x) = 30 + 12x^2 - x^3$ şeklinde bilinmektedir. 4 yıldan 4,1 yıla zaman artarken seçmen sayılarındaki değişimin yaklaşık değerini diferansiyel hesap yardımıyla bulunuz. [13 Puan]

$$N(x) = 30 + 12x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow dN = N'(x)dx = (24x - 3x^2) \underbrace{dx}_{\Delta x}$$

$$x=4, \Delta = 0,1 = \frac{1}{10} \quad \text{seçilirse}$$

$$dN = (24 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2) \frac{1}{10} = 4,8$$

yani, seçmen sayılarında yaklaşık olarak 4800 kişi artışı olur.

3) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$(a) \int \frac{x^2 + x + 2}{x^2(x+2)} dx \quad [8 \text{ Puan}]$$

Basit kesiçilere ayırsak :

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} A+C=1 \\ 2A+B=1 \\ 2B=2 \end{array} \left. \begin{array}{l} B=1, A=0, C=1 \\ \text{Buna göre verilen integral:} \end{array} \right\} \text{bulunur.}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{x} + \ln|x+2| + C$$

$$(b) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad [8 \text{ Puan}]$$

Degişken değiştire uygularsak :

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

$$(c) \int \sqrt{x} \ln x dx \quad [9 \text{ Puan}] \quad \text{Kısmı integrasyon uygularsak:}$$

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \quad \text{ve} \quad \sqrt{x} dx = d\vartheta \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$I = u\vartheta - \int v du = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C$$

4) (a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ fonksiyonunun, asimptotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremumlarını ve konkavlık (bükeylik) durumunu inceleyerek grafiğini çiziniz. [25 Puan]

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (f nin tanım kumesi)

$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3} \\ y=0 \Rightarrow x=-2 \end{array} \right\}$ grafik $(0, -\frac{2}{3})$ ve $(-2, 0)$ noktalarından geçer

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x-3} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x=3 \text{ düşey asimptot}$$

$$f'(x) = \frac{x-3-x-2}{(x-3)^2} = -\frac{5}{(x-3)^2} < 0 \quad (x \neq 0) \quad \text{yani } f \text{ hep azalan}$$

$$f''(x) = \frac{10}{(x-3)^3} \Rightarrow \begin{array}{ll} x > 3 \Rightarrow \text{grafik yukarı bükey} \\ x < 3 \Rightarrow \text{grafik aşağı bükey} \end{array}$$

