

TOBB ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2022-2023 BAHAR DÖNEMİ
MAT 103 GENEL MATEMATİK I FİNAL SINAVI SORULARI
25 NİSAN 2023



Ad Soyad:

No:

İMZA:

1. (10+7+8)	2. (7+8+10)	3. (7+8+10)	4. (5+5+5+5+5)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapmak gereklidir. Süre: 100 dk. Başarılar...

1. (a) Bir yüzme havuzu, zararlı bakterilerin yok edilmesi için periyodik olarak ilaçlanmaktadır. İlaçlama yapıldıktan t gün sonra havuz suyunun her cm^3 ünde

$$C(t) = t^2 - 12t + 60, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

bakteri görülmektedir. Havuzdaki bakteri sayısı, ilaçlamadan kaç gün sonra minimum olur?

$$C'(t) = 2t - 12 = 0 \Rightarrow t = 6 \quad (\text{kritik nokta})$$

$$C''(6) = 2 > 0 \Rightarrow t = 6 \text{ gün sonra bakteri sayısı minimum olur}$$

uç noktalar

$$\left\{ \begin{array}{l} C(0) = 60 \\ C(20) = 220 \\ C(6) = 24 \end{array} \right.$$

- (b) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$ ise $\frac{dy}{dx} = f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 5}}$$

- (c) $y = g(x) = 2^{\sin x}$ ise $\frac{dy}{dx} = g'(x) = ?$

$$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

$$g'(x) = 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 2$$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x} = \frac{\ln 1}{1^2 + 1} = \boxed{0}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ $(\frac{0}{0})$ belirsizliği var. L'hôpital uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = \boxed{1}$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (0^0) belirsizliği var.

$$y = (\sin x)^{\tan x} \Rightarrow \ln y = (\tan x) \ln(\sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{(1/\tan x)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x) \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = \boxed{1}$$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$ (Değişken değiştirme uygulanır.)

$$1 + \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|1 + \sin x| + C}$$

(b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ (Kısmî integrasyon uygulanır.)

$$\ln x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\sqrt{x} dx = dv \Rightarrow v = \frac{2}{3} x^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = uv - \int v du = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C}$$

(c) $\int \frac{dx}{(x+4)(x-1)}$ (Basit kesirlere ayırma uygulanır.)

$$\frac{1}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} A(x-1) + B(x+4) \equiv 1 \\ A+B=0 \\ -A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow B = 1/5, A = -1/5$$

$$\int \frac{dx}{(x+4)(x-1)} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{5} (\ln|x-1| - \ln|x+4|) + C = \boxed{\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-1}{x+4} \right| + C}$$

4. $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f nin tanım kümesini, yatay ve dikey asimptotlarını, eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (f \text{ nin tanım kümesi})$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ y=0 \Rightarrow x=-1/2 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, -1) \text{ ve } (-1/2, 0) \text{ eksenleri kestiği noktalar.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2 \Rightarrow y=2 \text{ yatay asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow x=1 \text{ dikey asimptot}$$

(b) f nin varsa kritik noktalarını, yerel ekstremum değerlerini, artan/azalan olduğu aralıkları bulunuz.

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \quad (x \neq 1)$$

kritik nokta yok!

tanım kümesinde her yerde f azalan (türevi negatif)

f nin yerel ekstremumu yoktur!

(c) f nin varsa dönüm (büküm) noktalarını belirleyip iç büküm/dış büküm olduğu aralıkları bulunuz.

$$f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1$$

büküm noktası yoktur!

$$x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow (1, +\infty) \text{ da dış büküm (yukarı konca)}$$

$$x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, 1) \text{ de iç büküm (aşağı konca)}$$

(d) f nin işaret değişim tablosunu oluşturunuz.

x	$-\infty$	$-1/2$	1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	-
$f''(x)$	-	-	+	+	+
$f(x)$	\nearrow 2	\searrow 0	\nearrow $-\infty$ / $+\infty$	\searrow -1	\nearrow 2

(e) f nin grafiğini çiziniz.

