2. Hafta Uygulama Soruları

Kartezyen koordinatlarda yay uzunluğu ve dönel yüzeyin alanı

Soru 1 $x \in [2,3]$ iken $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm: $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$ olup $(f'(x))^2 + 1 = \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2}\right)$ elde edilir. O halde istenilen eğri uzunluğu

$$\int_{x=2}^{3} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x=2}^{3} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{x=2}^{3} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right) dx = \frac{13}{4} \text{ birimdir.}$$

Soru 2 $x = \ln(\sec y)$ eğrisinin $0 \leq y \leq \pi/3$ aralığındaki parçasının uzunluğu nedir?

Çözüm: $x = \ln(\sec y)$ için $\dfrac{dx}{dy} = \tan y$ olup istenilen yay uzunluğu

$$\int_{y=0}^{\pi/3} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{0}^{\pi/3} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\ dy =$$

$$\int_{0}^{\pi/3} \sqrt{\tan^2 y + 1}\ dy = \int_{0}^{\pi/3} |\sec y| dy = \int_{0}^{\pi/3} \sec y dy =$$

$$\ln(\sec y + \tan y)\Big|_{0}^{\pi/3} = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ bulunur.}$$

Soru 3 $t \in [0, 2\pi]$ aralığında $\begin{cases} x = 2(1 - \cos t) \\ y = 2\sin t \end{cases}$ şeklinde parametrik olarak verilen eğrinin uzunluğunu hesaplayınız.

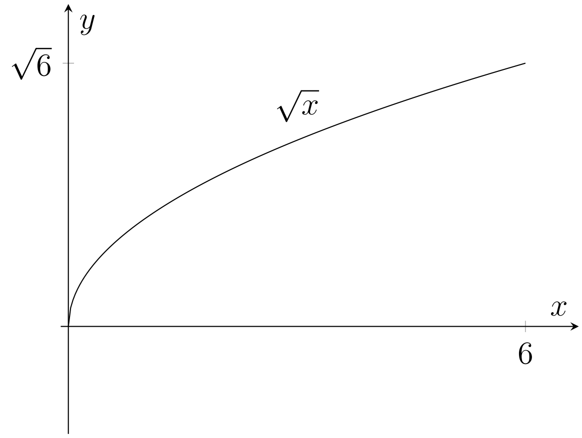
Çözüm: $\dfrac{dx}{dt} = 2\sin t$ ve $\dfrac{dy}{dt} = 2\cos t$ olup yay uzunluğu

$$\int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt =$$

$$\int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = \int_{t=0}^{2\pi} 2dt = 4\pi \text{ elde edilir.}$$

Soru 4 $0 \leq x \leq 6$ aralığında $y = \sqrt{x}$ eğrisinin x - ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen yüzey alanı hesaplayınız.

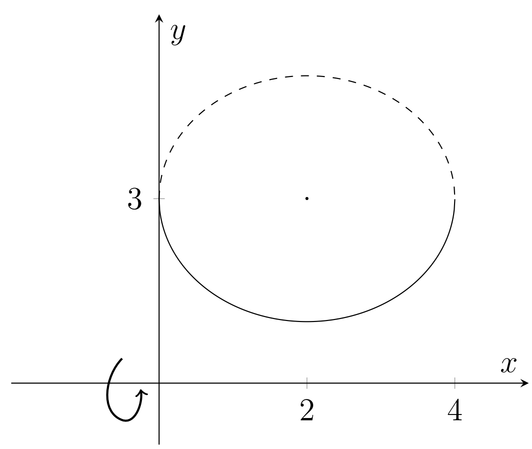
Çözüm: $A = \displaystyle\int_{0}^{6} 2\pi y \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx = \int_{0}^{6} 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$



$$= \int_0^6 \pi\sqrt{1+4x}dx = \frac{1}{6}\pi(1+4x)^{3/2}\Big|_0^6 = \frac{62\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

Soru 5 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ çemberinin x - ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen şeklin (torus) yüzey alanını hesaplayınız.

Çözüm: Çemberin üst yarısı $y_1 = 3+\sqrt{4-(x-2)^2}$ ve alt yarısı $y_2 = 3-\sqrt{4-(x-2)^2}$ ile verildiğinden



$$A_1 = \int_0^4 2\pi y_1\sqrt{1+(y_1')^2}dx = \int_0^4 2\pi(3+\sqrt{4-(x-2)^2})\sqrt{1+\frac{(x-2)^2}{4-(x-2)^2}}dx$$

$= \int_0^4 2\pi(3+\sqrt{4-(x-2)^2})\frac{2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx = 4\pi(4+3\pi)$ bulunur. (integrali hesaplamak için $x-2=2\sin x$ dönüşümünü kullanınız).

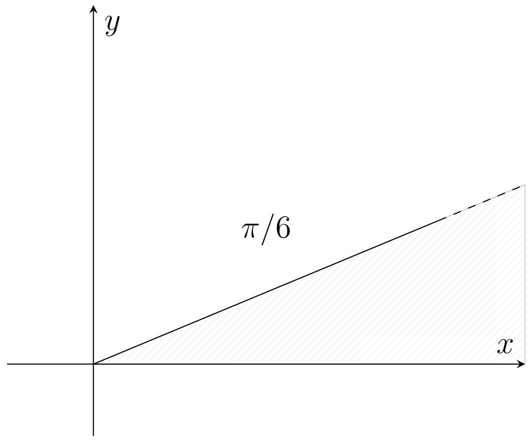
Benzer şekilde y_2 için $A_2 = 4\pi(3\pi-4)$ bulunur ve istenilen yüzey alan $A = A_1+A_2 = 24\pi^2$ dir.

Kutupsal koordinatlar ve kutupsal eğri çizimleri

Soru 1 Aşağıdaki eşitsizliklerin grafiğini çiziniz

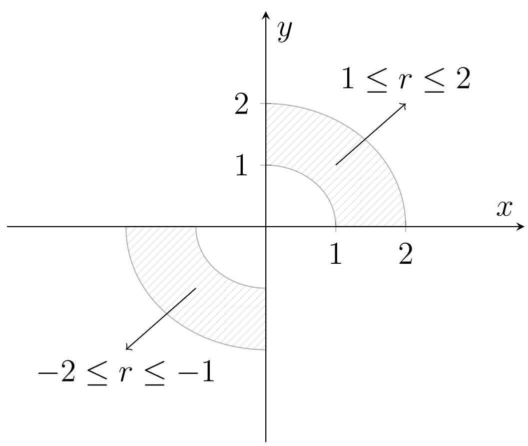
(a) $0 \le \theta \le \pi/6, \quad r \ge 0$

Çözüm:



(b) $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le |r| \le 2$

Çözüm:



Soru 2 Aşağıdaki denklemleri kartezyen denklemlerle ifade ediniz

(a) $r = 4\tan\theta\sec\theta$

Çözüm: $r = 4\tan\theta\sec\theta \Rightarrow r = 4\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\cdot\dfrac{r}{r\cos\theta}$

$$\Rightarrow r = 4\frac{y}{x}\cdot\frac{r}{x} \Rightarrow r\left(1-\frac{4y}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ 1 = \dfrac{4y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4y$$

(b) $r\sin(\theta + \pi/6) = 2$

Çözüm: $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{2} + \dfrac{\cos\theta}{2}$ olup

$r\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta + \dfrac{1}{2}r\cos\theta = 2 \Rightarrow \sqrt{3}y + x = 4$ elde edilir.

Soru 3 Aşağıdaki denklemleri kutupsal koordinatlarda ifade ediniz

(a) $xy = 2$

Çözüm: $xy = 2 \Rightarrow r^2 \sin\theta \cos\theta = 2$ veya $r^2 \sin 2\theta = 4$ diyebiliriz.

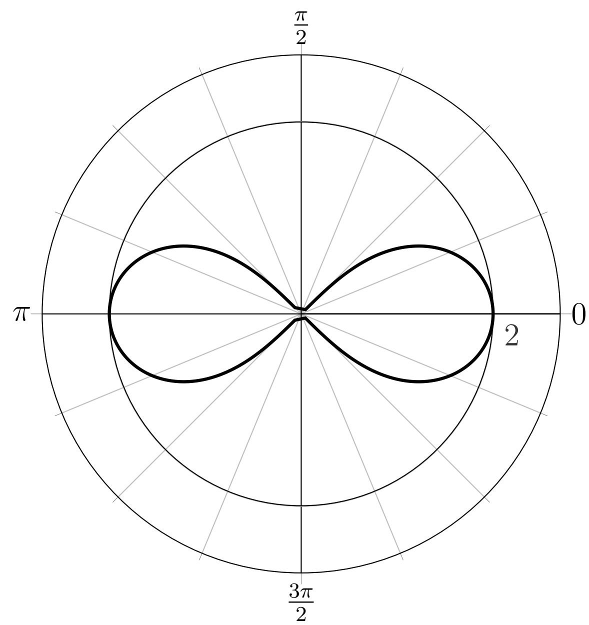
(b) $x^2 - y^2 = 1$

Çözüm: $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$ veya $r^2 \cos 2\theta = 1$ şeklinde yazabiliriz.

Soru 4 Aşağıdaki denklemlerin grafiğini çiziniz

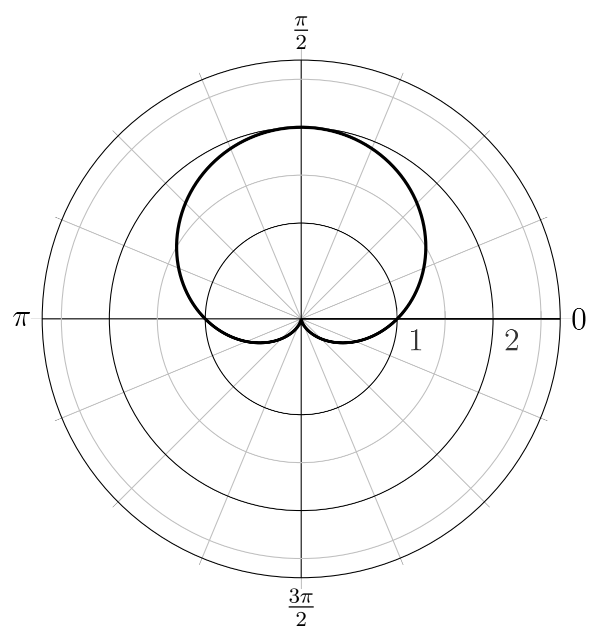
(a) $r^2 = 4\cos 2\theta$

Çözüm:



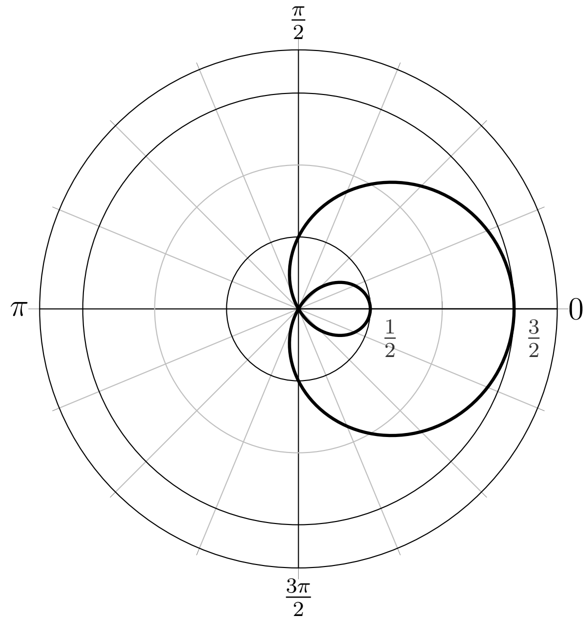
(b) $r = -1 + \sin\theta$

Çözüm:



(c) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$

Çözüm:

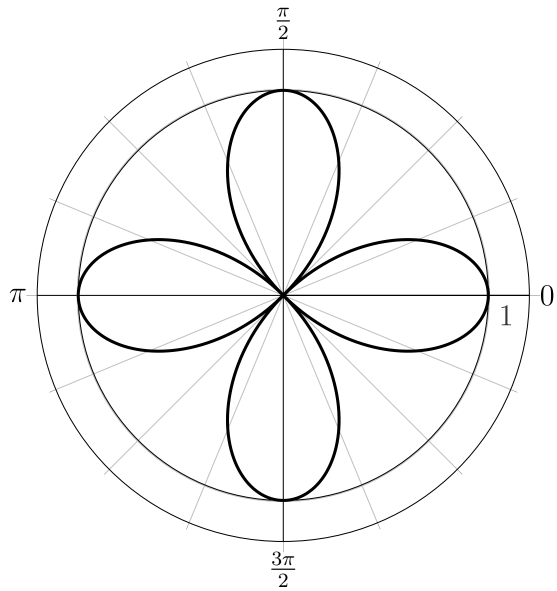


Kutupsal koordinatlarda alan ve yay uzunluğu

Soru 1 $r = \cos 2\theta$ ile tanımlı dört yapraklı gülün alanını hesaplayınız.

Çözüm: $\cos\theta = 0 \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{-\pi}{4}$

$$\begin{aligned} A =& 4\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2\theta)^2 d\theta \\ =& 4.2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 2\theta) d\theta \qquad \left(\cos^2 2\theta = \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) \\ =& \frac{4}{2}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi b r^2 \end{aligned}$$



Soru 2 $r = 3$ çemberinin dışında ve $r = 2(1 + \cos\theta)$ kardiyodinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

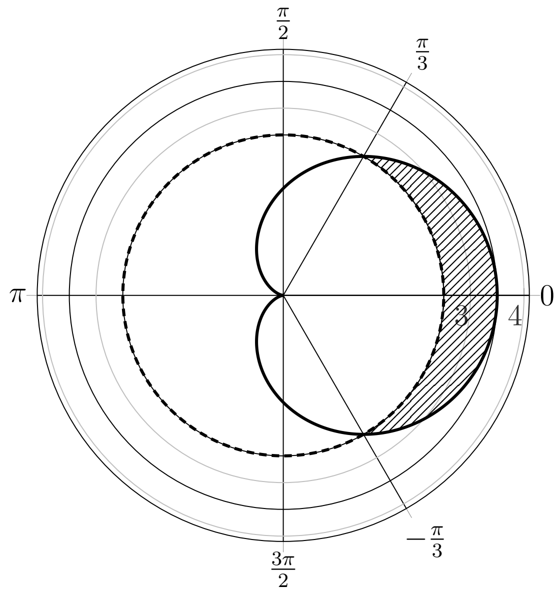
Hatırlatma:

$$A = \int_{\theta=a}^{b} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta - \int_{\theta=a}^{b} \frac{1}{2}[g(\theta)]^2 d\theta = \int_{\theta=a}^{b} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2 d\theta$$

Çözüm:

$2(1 + \cos\theta) = 3, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \theta \in \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

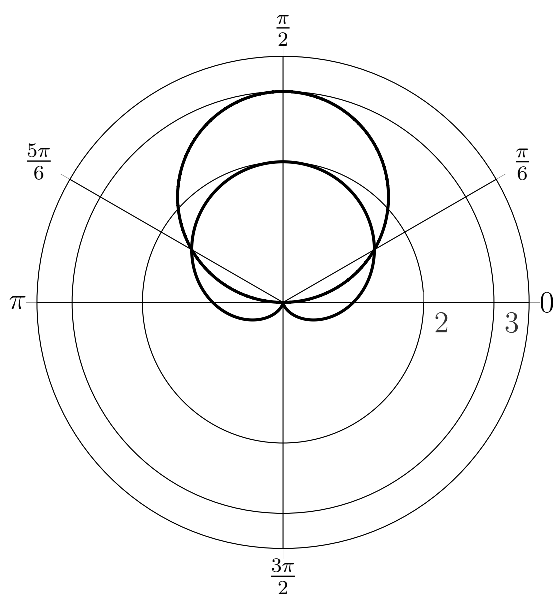
$$\begin{aligned}
A = & \int_{\theta=\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}[(r_d)^2 - (r_i)^2] d\theta \\
= & 2.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} [2(1\cos\theta)^2 - (3)^2] d\theta \\
= & \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) - 9) d\theta \\
= & \left(\frac{1}{2}\left(-\pi + \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)\right) br^2
\end{aligned}$$



Soru 3 $r = 3\sin\theta$ çemberinin içinde ve $r = (1+\sin\theta)$ kardiyodinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $3\sin\theta = 1 + \sin\theta \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

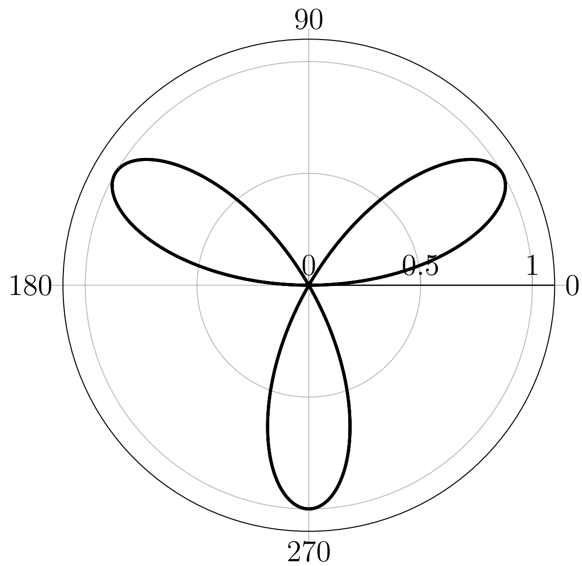
$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} ((3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2)d\theta \\ =& \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta)d\theta \\ =& (\frac{\pi}{3} + \sqrt{3})br^2 \end{aligned}$$



Soru 4 $r = a\sin 3\theta$ yaprak eğrisinin bir yaprağının alanını bulunuz.

Çözüm: Birinci bölgedeki yaprağın alanını hesaplayalım.$\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ arasındadır.

$$\begin{aligned} A =& \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (a\sin 3\theta)^2 d\theta \\ =& \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 3\theta) d\theta \\ =& \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6\theta) d\theta \\ =& \frac{\pi a^2}{12} br^2 \end{aligned}$$



Soru 5 (YAY UZUNLUĞU) $r = 1 + \sin\theta$ kardiyodinin uzunluğunu hesaplayınız.

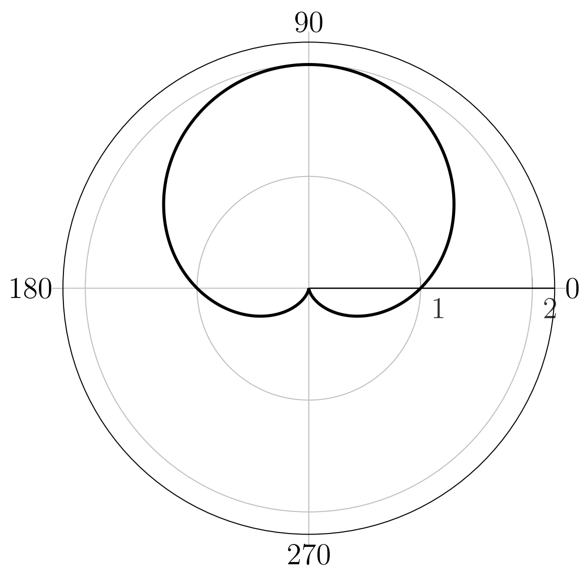
Hatırlatma: $r = f(\theta)$ ile verilen bir eğrinin α ve β arasındaki yay uzunluğu

$$L = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2} d\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2} d\theta$$

olarak elde edilir.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
L =& \int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta \\
=& \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta)^2 + (1+\sin\theta)^2} d\theta \\
=& \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\sin\theta} d\theta \\
=& \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta \\
=& \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta \\
=& \sqrt{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} d\theta] \\
=& 8br
\end{aligned}$$



Soru 6 Kutupsal koordinatlarda $r = 1 - \cos\theta$ ve $r = \cos\theta$ ile verilen eğrileri çiziniz ve kesişim bölgesinin alanını veren integrali yazınız. (İntegrali hesaplamayınız)

Çözüm: İki eğriyi eşitleyip kesişim noktalarını bulacak olursak $\theta = \pi/3$ ve $\theta = -\pi/3$ bulunur. İstenilen alan şekilde verilmiştir. Şekil x eksenine göre simetrik olduğu için 1.bölgedeki alanı bulup 2 ile çarpabiliriz. Birinci bölgedeki alanı ise $\theta = \pi/3$ doğrusu ile ikiye bölerek alt tarafını

$$\int_0^{\pi/3} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2} d\theta$$

ile ifade edebiliriz; $\theta = \pi/3$ doğrusunun üst tarafını ise

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\cos\theta)^2}{2} d\theta$$

integrali ile verebiliriz. O halde soruda istenilen bölgenin alanı

$$2 \cdot \left(\int_0^{\pi/3} \frac{(1-\cos\theta)^2}{2} d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\cos\theta)^2}{2} d\theta \right)$$

dır.