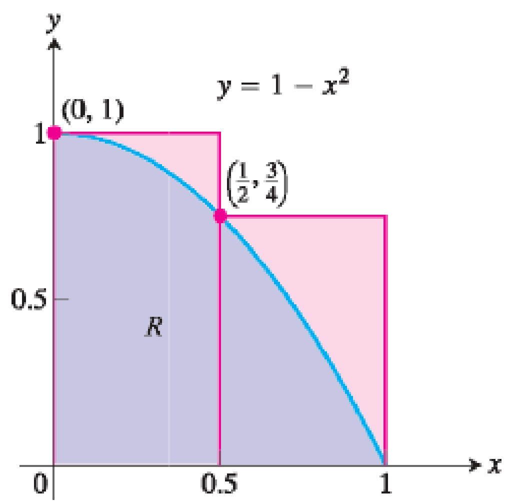
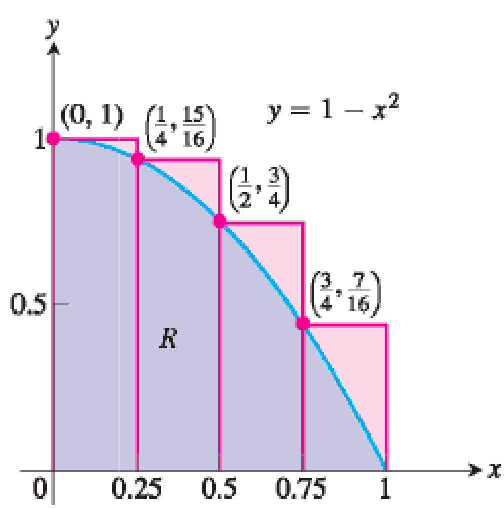
1. HAFTA UYGULAMA SORULARI

1)
a) $f(x) = 1 - x^2, x = 0$ ve $x = 1$ arasında kalan alanı kestirmek için sonlu yaklaşımlar kullanın.

Çözüm: R bölgesini içeren iki dikdörtgen çizelim.



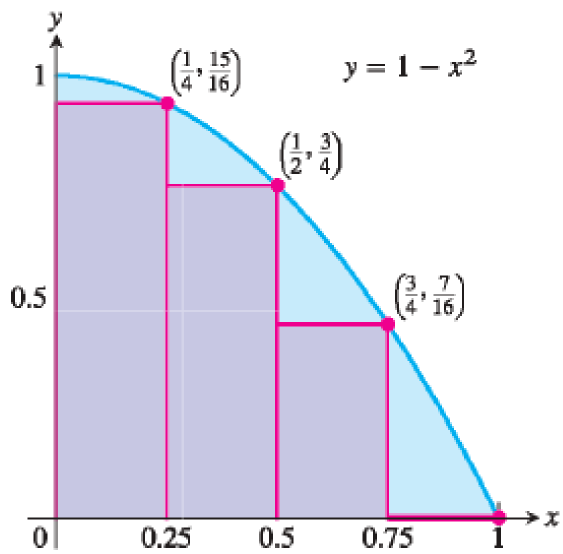
$A \approx 1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875$
R bölgesini içeren dört dikdörtgen çizersek;



$A \approx 1\frac{1}{4} + \frac{15}{16}\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\frac{1}{4} = \frac{25}{32} = 0.781$

Bu dikdörtgenler R bölgesinin dışında kaldığı için bu tahminler Alanın gerçek değerinden büyüktür.

Şimdi de R bölgesinin içinde kalan dört dikdörtgen çizersek,



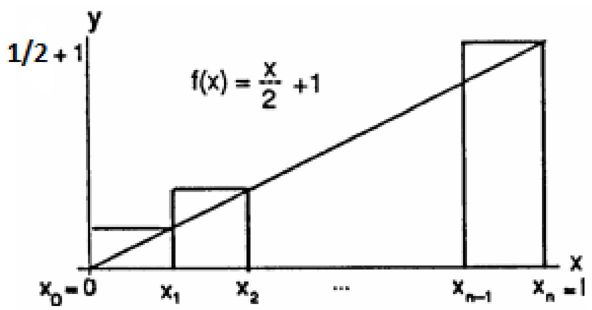
$A \approx \frac{15}{16}\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{7}{16}\frac{1}{4} = \frac{17}{32} = 0.531$

Bu dikdörtgenler R bölgesinin içinde kaldıklarından, bu tahmin Alanın gerçek değerinden küçüktür. O halde Alanın gerçek değeri bu alt toplam ile üst toplamların arasında bir yerdedir.

$$0.531 < A < 0.781$$

b) $[0,1]$ aralığında $y = \frac{x}{2} + 1$ eğrisinin x-ekseni ile arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



$\triangle x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ ve $0 \leq k \leq n$ için $x_k = k\triangle x$ olacak şekilde

$[0,1]$ aralığını parçalayalım. $c_1 = x_1$, $c_2 = x_2, ..., c_n = x_n$

alınırsa oluşan dikdörtgenlerin alanları:

$f(c_1)\triangle x = f(\triangle x)\triangle x = \left(\frac{\triangle x}{2} + 1\right)\triangle x = \frac{1}{2}(\triangle x)^2 + \triangle x$

$f(c_2)\triangle x = f(2\triangle x)\triangle x = \left(\frac{2\triangle x}{2} + 1\right)\triangle x = \frac{1}{2}2(\triangle x)^2 + \triangle x$

$f(c_3)\triangle x = f(3\triangle x)\triangle x = \left(\frac{3\triangle x}{2} + 1\right)\triangle x = \frac{1}{2}3(\triangle x)^2 + \triangle x$

$\vdots$

$f(c_n)\triangle x = f(n\triangle x)\triangle x = \left(\frac{n\triangle x}{2} + 1\right)\triangle x = \frac{1}{2}n(\triangle x)^2 + \triangle x$

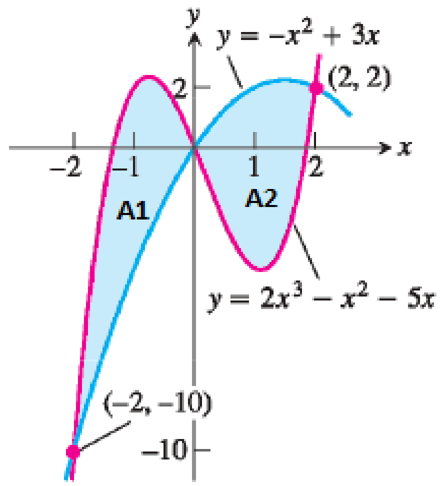
Öyleyse $\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\triangle x = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}k(\triangle x)^2 + \triangle x\right) = \frac{1}{2}(\triangle x)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} k + \triangle x \sum\limits_{k=1}^{n} 1$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1$$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{2} + 1\right)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{4} + 1$

2) a) $y = -x^2 + 3x$ ile $y = 2x^3 - x^2 - 5x$ eğrileri arasında kalan

bölgenin alanını hesaplayınız.



Çözüm:

$2x^3 - x^2 - 5x = -x^2 + 3x \Rightarrow 2x^3 - 8x = 0$

$\Rightarrow x = -2$ veya $x = 0$ veya $x = 2$ dir.

$$A1 = \int_{-2}^{0} \left(\left(2x^3 - x^2 - 5x\right) - \left(-x^2 + 3x\right) \right) dx$$
$$= \int_{-2}^{0} \left(2x^3 - 8x\right) dx = \left[\tfrac{2x^4}{4} - \tfrac{8x^2}{2} \right]_{-2}^{0}$$
$$= 0 - (8 - 16) = 8$$

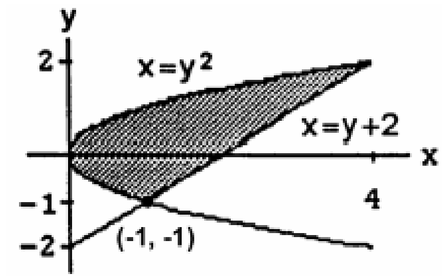
$$A2 = \int_{0}^{2} \left(\left(-x^2 + 3x\right) - \left(2x^3 - x^2 - 5x\right) \right) dx$$

$$= \int_{0}^{2} \left(8x - 2x^3\right) dx = \left[\tfrac{8x^2}{2} - \tfrac{2x^4}{4} \right]_{0}^{2}$$

$$= (16 - 8) = 8$$

Toplam Alan : $A1 + A2 = 8 + 8 = 16$

b) $x = y^2$ eğrisi ile $x = y + 2$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.



Çözüm:

$y^2 = y + 2 \Rightarrow (y+1)(y-2) = 0$

$y = -1$ ve $y = 2$ noktasında kesişirler.

$Alan = \int\limits_{-1}^{2} \left(y + 2 - y^2\right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$

3) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

b) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

c) $\int 4\tan^3 x dx$

d) $\int \frac{v^2 dv}{(1-v^2)^{5/2}}$

e) $\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}dy, \;\; y > 5$

f) $\int \ln(x+1)\, dx$

g) $\int \frac{4xdx}{x^3+4x}$

Çözüm:

a) $x = u$ ve $\sqrt{1-x}dx = dv$ olsun. O halde,

$dx = du$ ve $\frac{-2}{3}\sqrt{(1-x)^3} = v$ bulunur.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \left[x\frac{-2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{(1-x)^3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-2}{5}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

b) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dx$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos x}dx$$

$1 + \cos x = u$ dersek $\sin x dx = du$ olur. O halde,

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin x\sqrt{1+\cos x}dx = \left[\frac{-2}{3}(1+\cos x)^{3/2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$

c) $\int 4\tan^3 x dx = 4\int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x dx$

$$= 4\int \sec^2 x\tan x dx - 4\int \tan x dx$$

$\int \sec^2 x \tan x dx$ için $\tan x = u \Rightarrow \sec^2 x dx = du$

$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ için $\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$

$4\int \sec^2 x\tan x dx - 4\int \tan x dx = 4\frac{\tan^2 x}{2} - 4\ln|\sec x| + C$

d) $v = \sin\theta$ olsun. O halde $dv = \cos\theta d\theta$ ve

$\left(1 - v^2\right)^{5/2} = \cos^5\theta$ olur.

$\int \frac{v^2 dv}{(1-v^2)^{5/2}} = \int \frac{\sin^2\theta\cos\theta d\theta}{\cos^5\theta} = \int \tan^2\theta\sec^2\theta d\theta$

$\tan\theta = u \Rightarrow \sec^2\theta d\theta = du$

$\int \tan^2\theta \sec^2\theta d\theta = \frac{\tan^3\theta}{3} + C = \frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3 + C$

e) $y = 5\sec\theta$ olsun. O halde $dy = 5\sec\theta\tan\theta d\theta$ ve

$\sqrt{y^2-25} = 5\tan\theta$ olur. Öyleyse,

$$\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}dy = \int \frac{(5\tan\theta)(5\sec\theta\tan\theta)d\theta}{125\sec^3\theta} = \frac{1}{5}\int \tan^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{10}\int (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{10}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) = \frac{1}{10}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C$$

$$= \frac{1}{10}\left[\sec^{-1}\left(\frac{y}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{y^2-25}}{y}\right)\left(\frac{5}{y}\right)\right] + C$$

f) $\ln(x+1) = u$ ve $dx = dv$ olsun. O halde

$\frac{dx}{x+1} = du$, $x = v$ olur. Öyleyse,

$$\int \ln(x+1)\, dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + C$$

g) $\int \frac{4x dx}{x^3+4x} = \int \frac{4x dx}{x(x^2+4)} = 4\int \frac{dx}{x^2+4} = 4\int \frac{dx}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}$

$$= \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 (-\ln x)\, dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

Çözüm:

a) $\int\limits_0^1 (-\ln x)\,dx = \lim\limits_{b\to 0^+} [x - x\ln x]_b^1 = [1 - 1\ln 1] - \lim\limits_{b\to 0^+} [b - b\ln b]$

$$= [1-0] + \lim_{b\to 0^+} \frac{\ln b}{\left(\frac{1}{b}\right)} = 1 + \lim_{b\to 0^+} \frac{\frac{1}{b}}{\frac{-1}{b^2}}$$

$$= 1 - \lim_{b\to 0^+} b = 1 - 0 = 0$$

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 2xe^{-x^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} 2xe^{-x^2}dx$

$x^2 = u \Rightarrow 2xdx = du,\ \int e^{-u}du = -e^{-u}$

$\int\limits_{-\infty}^{0} 2xe^{-x^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} 2xe^{-x^2}dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\left[-e^{-x^2}\right]_b^0 + \lim\limits_{c\to\infty}\left[-e^{-x^2}\right]_0^c$

$= \lim\limits_{b\to-\infty}\left[-1 - \left(-e^{-b^2}\right)\right] + \lim\limits_{c\to\infty}\left[-e^{-c^2} - (-1)\right]$

$= (-1-0) + (0+1) = 0$

c) $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ şeklinde yazalım,

$A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x+1) = 1$

$x = -1 \Rightarrow A.2 = 1 \Rightarrow A = 1/2$

$(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C = 1$

$A + B = 0$ ve $A = 1/2 \Rightarrow B = -1/2, C = 1/2$ bulunur.

O halde,

$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{-x/2+1/2}{(x^2+1)}\right)dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln|x+1x+1| - \tfrac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \tfrac{1}{2}\tan^{-1}x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{\sqrt{b^2+1}}\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}b\right] - \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2}\tan^{-1}0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}.0 = \frac{\pi}{4}$$