= CEVAP ANAHTARI =

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2021-2022 BAHAR DÖNEMİ
MATEMATİK II(MAT 102), FİNAL SINAVI
10 NİSAN 2022

Adı-Soyadı: No: İmza:

1.(14 P.)	2.(7+7 P.)	3.(14 P.)	4.(12 P.)	5.(8+8 P.)	6.(15 P.)	7.(15 P.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar!

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{6+\cos(n)}}{n^{4/3}}$ serisinin yakınsaklık/ıraksaklık durumunu belirleyiniz.

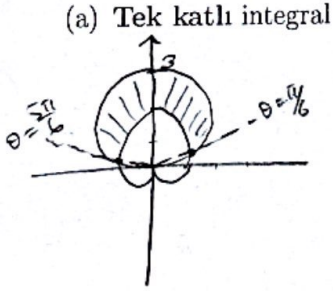
$-1 \le \cos(x) \le 1 \Rightarrow 5 \le 6+\cos(x) \le 7. \Rightarrow e^5 \le e^{6+\cos(x)} \le e^7$ olup Sürekli Fonksiyon Teoreminden $n \ge 1$ için $a_n = f(n)$ olarak tanımlanırsa $e^5 \le e^{6+\cos(n)} \le e^7$ sağlanır.

$n \ge 1$ için $n^{4/3} > 0$ olacağından eşitsizliği $n^{4/3}$ e bölersek;

$\frac{e^5}{n^{4/3}} \le \frac{e^{6+\cos(n)}}{n^{4/3}} \le \frac{e^7}{n^{4/3}}$ olur. p testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^7}{n^{4/3}}$ serisi yakınsak olup $(p = \frac{4}{3} > 1)$ Karşılaştırma Testi gereğince $\frac{e^{6+\cos(n)}}{n^{4/3}} \le \frac{e^7}{n^{4/3}}$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{6+\cos(n)}}{n^{4/3}}$ serisi yakınsaktır.

2. Kutupsal koordinat sisteminde verilen $r = 3sin(\theta)$ eğrisinin içinde $r = 1 + sin(\theta)$ eğrisinin dışında kalan bölgenin alanını,

(a) **Tek katlı** integral ile ifade ediniz (İntegrali **hesaplamayınız**!).



Eğrilerin kesişim noktası:

$3\sin\theta = 1+\sin\theta$

$2\sin\theta = 1$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ dır.

$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\left[(3\sin(\theta))^2 - (1+\sin\theta)^2\right] d\theta$$

(b) **İki katlı** integral ile ifade ediniz (İntegrali **hesaplamayınız**!).

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{1+\sin(\theta)}^{3\sin(\theta)} r \, dr \, d\theta$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|xy|}$ değerini (varsa) hesaplayınız.

$y=x$ doğrusu ile yaklaşalım;

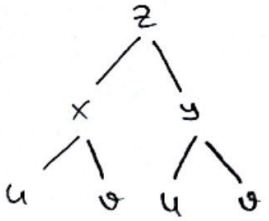
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{\substack{x\to 0\\(y=x)}} \frac{x.x}{|x.x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$y=-x$ doğrusu ile yaklaşalım;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{\substack{x\to 0\\y=-x}} \frac{x.(-x)}{|x.(-x)|} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Birbirine eşit olmadığından limit mevcut değildir.

4. $x = u^2+v^2$ ve $y = uv$ olmak üzere $z = sin(xy)+xe^{x+y}$ fonksiyonu veriliyor. $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ kısmi türevinin $(u, v) = (0, 1)$ noktasındaki değerini **zincir kuralından yararlanarak** bulunuz.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \left[\cos(xy).y + e^{x+y} + xe^{x+y}\right].2u$$

$$+ \left[\cos(xy).x + xe^{x}.e^{y}\right].v$$

$\left.\begin{matrix} u=0 \\ v=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}$ olup

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{(0,1)} = \cancel{\left[\cos(0).0 + e^{1} + 1.e^{1}\right].2.0} + \left[\cos(0).1 + 1.e^{1}.e^{0}\right].1$$

$$= 1+e.$$

5. $f(x,y) = \ln(xy^2)$ fonksiyonuna, $(x_0, y_0) = (4, 1/2)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini bulunuz ve bu denklemden yararlanarak, $ln(3.99(0.6)^2)$ ifadesinin yaklaşık değerini hesaplayınız.

$z = f(x,y) = \ln(xy^2) \Rightarrow F(x,y,z) = \ln(xy^2) - z$ olmak üzere

Teğet Düzlem Denklemi: $f_x(x_0,y_0).(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$

$f_x = \dfrac{y^2}{xy^2} = \dfrac{1}{x}$

$f_y = \dfrac{2xy}{xy^2} = \dfrac{2}{y}$

$x_0 = 4 \quad y_0 = \frac{1}{2}$ için

$z_0 = \ln(4.\frac{1}{4}) = \ln(1) = 0$

$\frac{1}{4}.(x-4) + 4.(y - \frac{1}{2}) - (z-0) = 0$

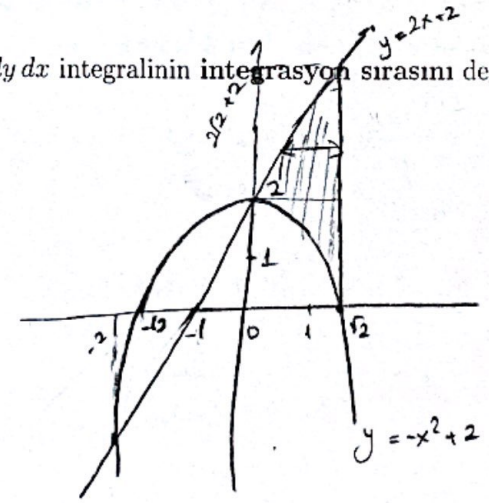
$$\boxed{\frac{x-4}{4} + 4.(y-0{,}5) = z}$$

Kutu içindeki denklemden yararlanırsak:

$\ln(3.99(0{,}6)^2) \approx \dfrac{3.99-4}{4} + 4.(0{,}6-0{,}5) = \dfrac{-0{,}01}{4} + 0{,}4 \approx 0{,}3975$

olarak bulunur.

6. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-x^2+2}^{2x+2} (x^3y + cos(x^y))\, dy\, dx$ integralinin integrasyon sırasını değiştiriniz.



$0 \le x \le \sqrt{2}$

$-x^2+2 \le y \le 2x+2$

$-x^2+2 = 2x+2$

$x^2+2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x=0 \quad x=-2$ de kesişirler.

$y = -x^2+2$ için

$x^2 = 2-y$

$x = \mp\sqrt{2-y}$

$y = 2x+2$ için

$x = \dfrac{y-2}{2}$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-x^2+2}^{2x+2} (x^3y + \cos(x^y))\, dy\, dx = \int_0^2 \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2}} (x^3y + \cos(x^y))\, dx\, dy + \int_2^{2\sqrt{2}+2} \int_{\frac{y-2}{2}}^{\sqrt{2}} (x^3y + \cos(x^y))\, dx\, dy$$

7. $f(x,y) = e^y(y^2 - x^2)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve bu noktaları sınıflandırınız.

$f_x = e^y(-2x) = 0 \iff x = 0$

$f_y = e^y(y^2 - x^2) + e^y(2y) = e^y(y^2 + 2y - x^2) = 0 \iff y^2 + 2y = 0 \iff y = 0$ veya $y = -2$

Kritik Noktalar $(0,0)$ ve $(0,-2)$ noktasıdır.

$f_{xx} = -2e^y$

$f_{xy} = -2xe^y$

$f_{yy} = e^y(y^2 + 2y - x^2) + e^y(2y + 2)$

$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

$= -2e^{2y}(y^2 + 4y - x^2 + 2) - 4x^2e^{2y}$

$D(0,0) = -2.1.2 - 4.0 = -4 < 0$ olduğundan $(0,0)$ eyer noktasıdır.

$D(0,-2) = -2.e^{-4}(4 - 8 - 0 + 2) - 4.0 = 4e^{-4} > 0$ dup

$f_{xx}(0,-2) = -2.e^{-2} < 0$ olduğundan $(0,-2)$ noktası yerel maksimum noktasıdır.