6. Aşağıda verilen fonksiyonunun $x = 5$ noktası komşuluğunda ($x = 5$ merkezli) Taylor serisini bulunuz. Yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını hesaplayınız. Serinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksak olduğu aralıkları belirleyiniz.

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

I. Yol: Tayler formulu ile: $\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(5)(x-5)^n}{n!}$ olmalı.

$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$f'(x) = -3x^{-4}$

$f''(x) = 3 \cdot 4 x^{-5}$

$f^{(3)}(x) = -3 \cdot 4 \cdot 5\, x^{-6}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+2)!\, x^{-(n+3)}}{2}$

olup

$$f(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (n+2)!\, 5^{-(n+3)}}{2 \cdot n!} (x-5)^n$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2 \cdot 5^{n+3}} (x-5)^n$$

bulunur.

II. Yol bilinen fonk. ile

$$\frac{1}{x^3} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$1/x$ in iki kez türevini aldık:

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{5+(x-5)} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+\frac{x-5}{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{5^n}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \sum_{n=2} \frac{(-1)^n n \cdot (n-1)(x-5)^{n-2}}{5^n}$$ bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+3)(n+2)|x-5|}{(n+2)(n+1) \cdot 5}$$

Şimdi seride oran testi yaparsak

$= \frac{|x-5|}{5} = L$ olup $L < 1$ iken, yani $0 < x < 10$ iken mutlak yakınsaktır.

$L = 1$ iken $\to x = 0$ için seri $\sum \frac{(n+2)(n+1)}{5^3}$ olup n. terim testinden ıraksak

$\to x = 10$ için seri $\sum \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{5^3}$ olup ıraksak.

$) > 1 \Rightarrow$ IRAKSAK $\Leftarrow (-\infty, 0] \cup [10, \infty)$

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, BAHAR DÖNEMİ 2016-2017
MAT 102, MATEMATİK II, ARASINAV
4 MART 2017

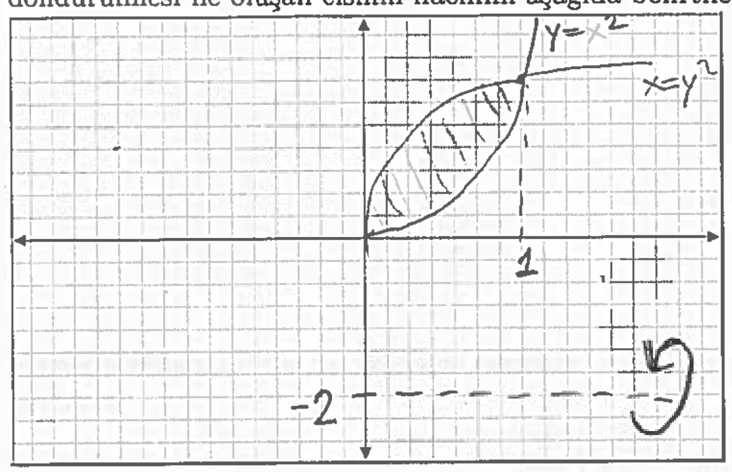
TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Ad Soyad: No: İMZA:

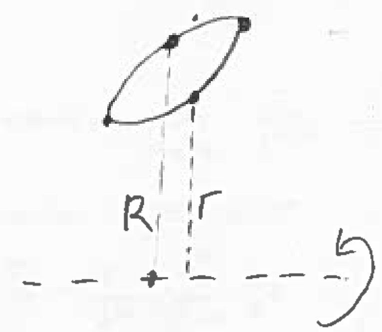
1. (20 p.)	2. (16 p.)	3. (20 p.)	4. (12 p.)	5. (12 p.)	6. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması ve tüm hesapların gösterilmesi gereklidir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri ile sınırlı kapalı bölgeyi çiziniz. Bu bölgenin $y = -2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini aşağıda belirtilen metodlarla bir integral olarak ifade ediniz:



(a) disk metodunu kullanarak (İntegrali hesaplamanıza gerek yoktur.)



$R = 2 + \sqrt{x}$

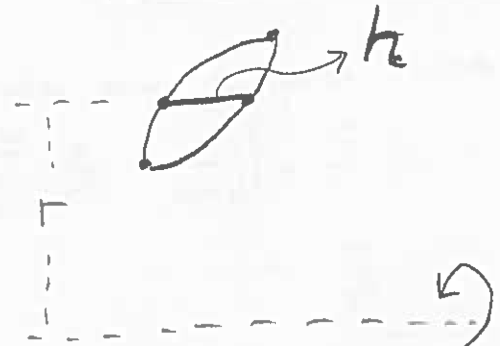
$r = 2 + x^2$

$$\int_0^1 \pi (R^2 - r^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \pi \left[(2+\sqrt{x})^2 - (2+x^2)^2\right] dx$$

Cevap

(b) kabuk metodunu kullanarak (İntegrali hesaplamanıza gerek yoktur.)



$$\int_0^1 2\pi r h\, dy$$

$$= \int_0^1 2\pi (2+y)(\sqrt{y} - y^2)\, dy$$

Cevap

$h = \sqrt{y} - y^2$

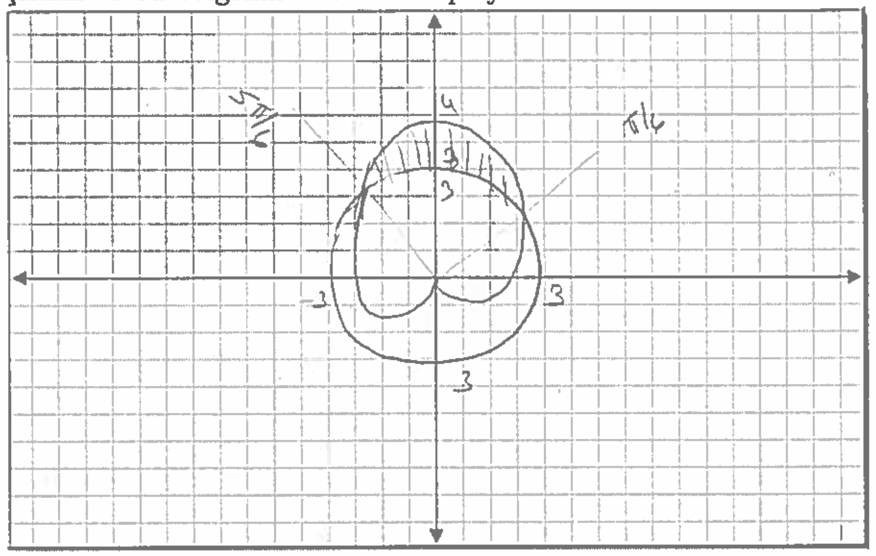
$r = 2 + y$

2. Aşağıdaki özellikleri sağlayan birer örnek veriniz. (Açıklama yapmanıza gerek yoktur.)

(a) Monoton azalan ve ıraksak bir dizi $\frac{1}{n}$ olmaz. Çünkü YAKINSAK $a_n = -n$ olur.	(b) Yakınsak fakat monoton olmayan bir dizi $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
(c) Şartlı yakınsak olan bir seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$	(d) $\{a_n\}$ sınırlı bir dizi olmak üzere, ıraksak olan bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak fakat $\{\frac{1}{n}\}$ sınırlı bir dizi

3. Kutupsal koordinat düzleminde, $r = 3$ eğrisi dışında ve $r = 2(1+\sin\theta)$ eğrisi içerisinde kalan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını hesaplayınız.

$r=3$ çember $\rightarrow x^2+y^2=9$



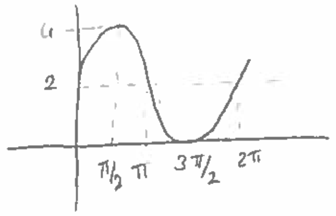
$3 = 2(1+\sin\theta)$

$1 = 2\sin\theta$

$\sin\theta = 1/2$

$\theta = \pi/6 , \frac{5\pi}{6}$

$2(1+\sin\theta)$



$$A = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}\left((2(1+\sin\theta))^2 - 9\right) d\theta = 2 \cdot 1/2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(4(1+2\sin\theta+\sin^2\theta) - 9\right) d\theta$$

$$\left(\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \qquad = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin\theta + 4\sin^2\theta - 5)\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 8\sin\theta\, d\theta + 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\cos 2\theta)\, d\theta - 5\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta$$

$$= -8\cos\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \sin 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - 5\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{2} + \pi - \pi/3 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \pi$$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$ serisinin karakterini (yakınsaklık/ıraksaklık) belirleyiniz.

$\left| (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ dir. Ayrıca $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-testinden yakınsaktır.

O halde Karşılaştırma testinden $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^2} \right|$ yakınsaktır.

Dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$ mutlak yakınsaktır.

5. Aşağıda verilen serinin karakterini (yakınsaklık/ıraksaklık) belirleyiniz. Eğer seri yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2^{n+5}} + \frac{4}{n(n+2)} \right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+5}}$

Oran testinde, $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^{n+6}} \cdot \frac{2^{n+5}}{\pi} = 1/2 < 1$

olduğundan yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+5}} = \frac{\pi}{2^6} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\text{geometrik seri}}$ $\quad \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-1/2} = 2$

$= \frac{\pi}{2^5}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

$\frac{1}{n^2}$ ile Limit Karşılaştırma yapalım

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = 4$ olup

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p testinde yakınsaktır. O halde

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ de yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} \rightarrow \frac{A}{(n)} + \frac{B}{(n+2)} = \frac{4}{n(n+2)}$

$An + 2A + Bn = 4$ $\quad \boxed{A=2}$ $\boxed{B=-2}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}\right)$

$= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) + \cdots$

$= 3$

O halde seriyi iki toplam halinde yazabiliriz.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2^{n+5}} + \frac{4}{n(n+2)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+5}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

$= \frac{\pi}{2^5} + 3$

$S_k = \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \left(\frac{2}{2} - \cancel{\frac{2}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{2}{k-1}} - \frac{2}{k+1}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{k}} - \frac{2}{k+2}\right)$

$\lim S_k = \lim 3 - \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} = 3$