

CEVAP ANAHTARI

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir.
Başarılar.

1. Aşağıdaki serinin yakınsak veya iraksaklığını belirleyiniz. Seri yakınsak ise toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} - 1}{9^n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1}}{9^n} - \frac{1}{9^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \frac{1}{6} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{a_n} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n}_{b_n} \end{aligned}$$

a_n ve b_n ayrı ayrı yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} - 1}{9^n}$ serisinde yakınsak olacaktır

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\right) \\ &= \frac{2}{3} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{G.S.} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \\ &\quad \left|\frac{2}{3}\right| < 1 \text{ yak.} \end{aligned}$$

benzer şekilde;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots\right) = \frac{1}{9} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}}_{G.S.} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \\ \left|\frac{1}{9}\right| < 1 \text{ yak.}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yak $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} - 1}{9^n}$ yakınsaktır.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} - 1}{9^n} = \frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24} \text{ serinin toplamıdır.}$$