

Mat 102 - Matematik II / Calculus II

Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:

Seviye eğri ve yüzeyler, Limit ve süreklilik

wolframalpha.com uygulamasında bir fonksiyonun tanım kümesini bulmak için:

```
x + arccos y
```

seviye eğrilerini çizdirmek için:

```
contour plot z = ln (xy) at z = 1
```

grafliğini çizdirmek için:

```
3d plot ln(xy)
```

kodlarını kullanabilirsiniz. Ancak 3D grafikleri her zaman doğru çizmeyebilir. Örneğin $\ln(xy)$ fonksiyonunun tanım kümesi ve seviye eğrilerini ele alarak 3D grafiği ile karşılaştırmışız.

1) Aşağıda fonksiyonların tanım kümelerini bulup ilgili uzayda gösteriniz.

a) $z = f(x, y) = \ln(xy)$ C: $\{(x, y) \mid xy > 0\}$

b) $z = f(x, y) = y + \arccos x$ C: $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1\}$

c) $h = f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ C: $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

2) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini seviye eğrilerini kullanarak çiziniz.

a) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

3) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen noktalardaki seviye(düzye) eğrilerini çiziniz.

a) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$, $k = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$

b) $f(x, y) = xy$, $k = -2, 0, 1$

c) $f(x, y) = y - \cos x$, $k = -2, 0, 1$

wolframalpha.com uygulamasında bir fonksiyonun limitini bulmak için:

```
limit sin(xy)/ x as (x,y) tends to (0,pi)
```

kodunu kullanabilirsiniz.

4) Aşağıdaki limitleri varsa bulunuz, yoksa olmadığını gösteriniz.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{1}{4})} x^2 \tan(xy)$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 (y - 1)^2}{x^2 + (y - 1)^2}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

5) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ $C: S_f = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \neq 0\}$

b) $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$, $C: S_f = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\}$

c) $f(x, y, z) = x \ln(yz)$, $C: S_f = \{(x, y, z) \mid yz > 0\}$

6) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4y^2}{x - 2y}, & x \neq 2y \\ g(x), & x = 2y \end{cases}$ fonksiyonu \mathbb{R}^2 'de sürekli ise $g(x)$ 'i bulunuz.

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:

Kısmi türev, Zincir kuralı, Gradyen vektörü ve Yönlü türev

wolframalpha.com uygulamasında bir fonksiyonun yönlü türevini bulmak için:

derivative of $x^2 y + x y^2 + z$ in the direction $(3, 3, 0)$ at point $(1, 2, 1)$

kodunu kullanabilirsiniz.

1) Aşağıdaki fonksiyonların kısmi türevlerini bulunuz.

a) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

b) $f(x, y, z) = e^{\frac{xy}{z}}$

c) $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

2) a) $u = \sin(xy) + \cos(xz) + \tan(yz) \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = ?$

b) $z = f(x, y) = \sin^2(3x - 4) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

c) $z = txy^2, x = t + \ln(y + t^2), y = e^t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ?$

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), x = tu, y = \frac{t}{u} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = ?, \frac{\partial f}{\partial u} = ?$

3) $w(x, y) = f(x^2 + y^2, xy, 2x)$ ve $f, 2.$ dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere; $w_{yx}(x, y) = ?$

4) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + 4y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ olarak tanımlanıyor. $f_x(0, 0) = ?, f_y(0, 0) = ?$

$$5) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ olsun.}$$

a) f , $(0, 0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(0, 0)$ değerini bulunuz.

$$6) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ olsun.}$$

a) f , $(0, 0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(0, 0) = ?$, $f_y(0, 0) = ?$

$$7) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ olsun.}$$

a) f , $(0, 0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(0, 0)$ değeri var mı?

c) $f_{xx}(0, 0)$ değeri var mı?

8) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ fonksiyonunun $P_0 = (1, 2, 3)$ noktasındaki ve $\vec{v} = -2i + j + -2k$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz. C:(4)

$$9) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ fonksiyonu verilsin .}$$

a) $\nabla f(0, 0) = ?$

b) $\vec{u} = i + j$ vektörü için $D_{\vec{u}}f(0, 0) = ?$

10) $f(u, v)$ bir fonksiyon, $f(-1, 3) = 0$, $f_1(-1, 3) = 2$ ve $f_2(-1, 3) = -3$ olsun.

$g(x, y, z) = f(xyz, x^2 + y^2 + z^2)$ ise $\nabla g(1, -1, 1) = ?$ C: $\langle -8, 8, -8 \rangle$

11) $f(x, y) = e^x \ln y$ fonksiyonu verilsin .

a) Hangi doğrultuda en hızlı artar?

b) Bu doğrultudaki artış oranı nedir?

c) $\vec{u} = i + j$ olmak üzere $D_{\vec{u}}f(0, 1) = ?$

12) $f(x, y)$, (a, b) noktasında her yönde yönlü türeve sahip olan bir fonksiyon olsun.

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$ ve $\vec{v} = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ vektörleri için $D_{\vec{u}}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $D_{\vec{v}}f(a, b) = 2$ ise f 'nin

(a, b) noktasındaki maksimum artış oranı kaçtır? C: $\left(\frac{\sqrt{28+8\sqrt{3}}}{\sqrt{3+1}} \right)$