Mat 102 - Matematik II / Calculus II
Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:
Seviye eğri ve yüzeyler, Limit ve süreklilik

`wolframalpha.com` uygulamasında bir fonksiyonun tanım kümesini bulmak için:

```
x + arccos y
```

seviye eğrilerini çizdirmek için:

```
contour plot z = ln (xy) at z = 1
```

grafiğini çizdirmek için:

```
3d plot ln(xy)
```

kodlarını kullanabilirsiniz. Ancak 3D grafikleri her zaman doğru çizmeyebilir. Örneğin $\ln(xy)$ fonksiyonunun tanım kümesi ve seviye eğrilerini ele alarak 3D grafiği ile karşılaştırınız.

1) Aşağıda fonksiyonların tanım kümelerini bulup ilgili uzayda gösteriniz.

a) $z = f(x,y) = \ln(xy)$ C: $\{(x,y) \mid xy > 0\}$

b) $z = f(x,y) = y + \arccos x$ C: $\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1\}$

c) $h = f(x,y,z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ C: $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

2) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini seviye eğrilerini kullanarak çiziniz.

a) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ c) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

3) Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen noktalardaki seviye(düzey) eğrilerini çiziniz.

a) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|,\quad k = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$

b) $f(x,y) = xy,\quad k = -2, 0, 1$

c) $f(x,y) = y - \cos x,\quad k = -2, 0, 1$

`wolframalpha.com` uygulamasında bir fonksiyonun limitini bulmak için:

```
limit sin(xy)/ x as (x,y) tends to (0,pi)
```

kodunu kullanabilirsiniz.

4) Aşağıdaki limitleri varsa bulunuz, yoksa olmadığını gösteriniz.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4}$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$ c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\frac{1}{4})} x^2\tan(xy)$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

5) Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları kümeleri bulunuz.

a) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ C:$S_f=\{(x,y)\mid x^2-y^2\neq 0\}$

b) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-1}$, C:$S_f=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\neq 1\}$

c) $f(x,y,z)=x\ln(yz)$, C:$S_f=\{(x,y,z)\mid yz>0\}$

6) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4y^2}{x-2y}, & x\neq 2y\\ g(x), & x=2y\end{cases}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$'de sürekli ise $g(x)$'i bulunuz.

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:
Kısmi türev, Zincir kuralı, Gradyen vektörü ve Yönlü türev

`wolframalpha.com` uygulamasında bir fonksiyonun yönlü türevini bulmak için:

```
derivative of x^2 y+ x y^2+z in the direction (3,3,0) at point (1,2,1)
```

kodunu kullanabilirsiniz.

1) Aşağıdaki fonksiyonların kısmi türevlerini bulunuz.

a) $f(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ b) $f(x,y,z)=e^{\frac{xy}{z}}$ c) $f(x,y)=\cos\left(\frac{x}{y}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

2) a) $u=\sin(xy)+\cos(xz)+\tan(yz) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=?$

b) $z=f(x,y)=\sin^2(3x-4) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=?,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=?$

c) $z=txy^2,\ x=t+\ln(y+t^2),\ y=e^t \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dz}{dt}=?$

d) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2),\ x=tu,\ y=\dfrac{t}{u} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial f}{\partial t}=?,\ \dfrac{\partial f}{\partial u}=?$

3) $w(x,y)=f(x^2+y^2,xy,2x)$ ve f, 2. dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olmak üzere; $w_{yx}(x,y)=?$

4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ olarak tanımlanıyor. $f_x(0,0)=?$, $f_y(0,0)=?$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$'da türevlenebildiğini gösteriniz.

6) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun.

a) f, $(0,0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(x,y) = ?$, $f_y(x,y) = ?$

c) $f_{yx}(0,0) = ?$

7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ olsun.

a) f, $(0,0)$ noktasında sürekli mi?

b) $f_x(0,0)$ değeri var mı?

c) $f_{xx}(0,0)$ değeri var mı?

8) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ fonksiyonunun $P_0 = (1,2,3)$ noktasındaki ve $\overrightarrow{v} = -2i + j + -2k$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz. C:(4)

9) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu verilsin .

a) $\nabla f(0,0) = ?$

b) $\overrightarrow{u} = i + j$ vektörü için $D_u f(0,0) = ?$

c) $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$'da türevlenebilir midir? Neden?

10) $f(u,v)$ bir fonksiyon, $f(-1,3) = 0$, $f_1(-1,3) = 2$ ve $f_2(-1,3) = -3$ olsun.
$g(x,y,z) = f(xyz, x^2+y^2+z^2)$ ise $\nabla g(1,-1,1) = ?$ C:$< -8, 8, -8 >$

11) $f(x,y) = e^x \ln y$ fonksiyonu verilsin .

a) Hangi doğrultuda en hızlı artar?

b) Bu doğrultudaki artış oranı nedir?

c) $\overrightarrow{u} = i + j$ olmak üzere $D_{\overrightarrow{u}} f(0,1) = ?$

12) $f(x,y)$, (a,b) noktasında her yönde yönlü türeve sahip olan bir fonksiyon olsun.
$\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}i - \dfrac{1}{\sqrt{2}}j$ ve $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}i + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j$ vektörleri için $D_{\overrightarrow{u}} f(a,b) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ve $D_{\overrightarrow{v}} f(a,b) = 2$ ise f'nin (a,b) noktasındaki maksimum artış oranı kaçtır? C:$\left(\frac{\sqrt{28+8\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1}\right)$

Mat 102 - Matematik II / Calculus II
Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:
Türev, Gradiyent ve Uygulamaları

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$da sürekli ve kısmi türevlere sahip olduğunu gösteriniz.

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $P = (3,4)$ noktasındaki $L(x,y)$ lineerleştirmesini yazınız ve bundan faydalanarak $\sqrt{(2,98)^2 + (4.03)^2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

CEVAP: 5.012

3) Teğet düzlemi yaklaşımını (doğrusal yaklaşım) kullanarak $e^{0.1}\ln(0.9)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. (-0.1)

4) $z = f(x,y)$ fonksiyonu için $f(1,2) = 3, f_x(1,2) = 2$ ve $f_y(1,2) = 5$ olduğu biliniyor. $f(1.1, 1.8)$ in değerini yaklaşık olarak bulunuz. $(f(1.1, 1.8) \approx 2.2$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{xy^2}{1+z^2}$ ise, $f(1.01, 1.98, 2.03)$ ün yaklaşık değerini bulunuz. (0.7728)

6) Aşağıdakilerin yaklaşık değerini hesaplayınız.

(a) $\sin(31°) \cdot \cos(58°)$

(b) $(1.002)(2.003)^2(3.004)^3$

7) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ eşitliği veriliyor. Başlangıç durumunda $x = 100$ ve $y = 25$ dir. x, 30 artar ve y, 5 azalırsa z'de nasıl bir değişiklik olur. (Diferansiyel yardımıyla çözebilirsiniz) $(\dfrac{1}{z^2}dz = \dfrac{1}{x^2}dx + \dfrac{1}{y^2}dy \Rightarrow dz = -2$

8) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 108y$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. $((\pm 6, 0)$ eyer noktası, $(0,6)$ yerel min. , $(0,-6)$ yerel maks.)

9) $f(x,y) = xy(3-x-y)$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve bu kritik noktalarda yerel maksimum ve minimum değerleri alıp almadığını belirleyiniz.
CEVAP:Kritik noktalar $(0,0)(3,0), (0,3) ve (1,1)$. Eyer(semer) noktaları $(0,0), (3,0), (0,3)$. $f(1,1) = 1$ yerel max. değeri.

10) Aşağıdaki fonksiyonların tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

(a) $f(x,y) = x\sqrt{y} - x^2 + 9x - y \quad (y > 0) \quad ((6,9)$ noktası yerel maks.)

(b) $g(x,y) = (x-1)\ln(xy) \quad ((1,1)$ noktası bir semer noktası)

11) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ fonksiyonun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0,0)$ eyer noktası)

12) $D = \{(x,y) : x \in \ [0,3]\}$ ile tanımlanıyor. Her $(x,y) \in$ D için $\dfrac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$ olduğunu gösteriniz. ($f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)e^{-x-y+2}}{4}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunarak gösterilebilir.)

13) (a) $f(x,y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$ nin tüm kritik noktalarını bulup sınıflandırınız.

(b) Kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$ elipsoidi içine yerleştirilebilen maksimum hacimli dikdörtgensel kutunun boyutlarını bulunuz ve maksimum hacmini bulunuz. $\left(\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\right)$

(c) $f(x,y) = xy$ nin $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki en büyük ve en küçük değerlerini bulmak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanınız.

(d) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 8x + -4y$ fonksiyonunun $1 \leq x \leq 2$ ile $-1 \leq y \leq 1$ in belirlediği R bölgesi üzerindeki en büyük ve en küçük değerini bulunuz.

14) Sınav notları $g(x,y,z) = 10f(x,y,z)$ fonksiyonu ile hesaplansın. (x,y,z), $\quad x^2+y^2+z^2 = 25$ şartını sağlamak üzere $f(x,y,z) = x^2 + 2z^2 - (y-6)^2 - 16$ olarak tanımlı ise hangi (x,y,z) değerine karşılık gelen notu almak istersin? ($(0,2,\sqrt{21})$ veya $(0,2,-\sqrt{21}) \Rightarrow g = 100$)

15) $f(x,y) = -4x^3 - xy^2 + 2x^2y + x$ fonksiyonunun maksimum, minimum ve eyer noktalarını bulunuz. ($(0,\pm1)$ eyer noktası, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ yerel maks. , $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$ yerel min.)

16) Aşağıdaki fonksiyonların verilen bölgeler üzerindeki mutlak ekstremumlarını bulunuz.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad R = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ (maks: $(\pm2,0)$, $\quad$ min: $(0,\pm2)$)

(b) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 8x - 4y,\ R = \{(x,y) |\, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ $(maks : (2,1) \Rightarrow 17, min : (0,1) \Rightarrow -3)$

17) $f(x,y) = 4x^3 + y^2 - 2x^2y + 102$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(3,9)$ eyer noktası, $\quad (0,0)$ eyer noktası)

18) $f(x,y,z) = xyz$ fonksiyonunun $x + 2y + z = 2$ şartı altındaki maksimum değeri nedir?($x = z = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{1}{3} \Rightarrow v = \dfrac{4}{27}$ maks.)

19) $f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2$ fonksiyonunun $x^4 + 2y^4 \leq 1$ bölgesindeki ekstremum değerlerini bulunuz. $\quad ((0,0), (0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}), (\pm1, 0), (\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}) \Rightarrow$ maks:$f(0,0) = 16$, $\quad$ min:$f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}) = 13)$

20) $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz. ($(0,0)$ eyer noktası, $(1,1), (1,-1)$ yerel maksimum)

21) $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ eğrisi (bir elips) üzerinde orijine en yakın ve en uzak noktaları bulunuz.

CEVAP:$(2, 1)$ ve $(-2, -1)$ orijine en yakın noktalar

$(2, -4)$ ve $(-2, 4)$ orijine en uzak noktalar

22) $f(x, y) = 2xy$ fonksiyonunun $D : x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

CEVAP: $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -4$ minimum

$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4$ maksimum, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -4$ minimum

23) Yüzey alanı $600\,cm^3$ olan maksimum hacimli dikdörtgen biçimindeki bir kutunun boyutlarını bulunuz. (uzunluk $10\,cm$, maks. hacim $1000\,cm^3$)

24) Lagrange çarpanları metodunu kullanarak, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi üzerinde, $P(-1, 0)$ noktasına en uzak olan noktaları bulunuz.

$((\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ve $(\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}))$

25) Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen kısıtlanmış eğri üzerindeki ekstremumlarını bulunuz.

(a) $f(x, y) = x^2 + 8y^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (maks. değer 8 ve $(0, 1)$ noktasında olur. min. değer $\frac{8}{27}$ ve $(\frac{4}{9}, \frac{1}{9})$ noktasında olur.)

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x - 2y + 2z = 6$ (maks. değer yok. min değer 4 ve $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ noktasında olur.)

(c) $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerinden $(0, 4)$ noktasına olan en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz. $((\pm\sqrt{5}, 2)$ ve min. uzaklık 3 tür.)

Mat 102 - Matematik II / Calculus II
Çalışma Soruları

Çok Değişkenli Fonksiyonlar:
Çok Katlı İntegraller ve Uygulamaları

1) Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dydx$ $(\frac{1}{40})$

b) $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$ $(\ln \frac{25}{24})$

c) $\int_{-1}^{2} \int_{-y}^{y+2} x + 2y^2 dxdy$ (36)

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dydx$ $(\frac{\pi}{6})$

e) $R = \{(x,y); |x| + |y| \leq 1\} \rightarrow \quad \iint_R x^3y^5 dxdy = ?$ (0)

2) x-ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı bölge R olduğuna göre $\iint_R e^{-x^2} dA$ integralini hesaplayınız. Cevap $\frac{e-1}{2e}$

3) x-ekseni, $x = 1$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlı bölge R dir. $x + y - z = 0$ düzleminin altında ve R bölgesinin üzerindeki hacmi bulunuz. Cevap $\frac{7}{20}$birim küp

4) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ katı küresinden $x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0)$ dairesel silindiri ile kesilen bölgenin hacmini bulunuz.(ipucu:kutupsal koordinatlar kullanınız.)Cevap $\frac{4}{3}a^2(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$birim küp

5) a) R bölgesi; $x = 2, y = x$ doğruları ve $xy = 1$ hiperbolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R \frac{x^2}{y^2} dA$ integralini hesaplayınız.$(\frac{-9}{4})$

b) R bölgesi; $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri ile sınırlı bölge ise $\iint_R (x^2 + y)dA = ?$ $(\frac{133}{140})$

c) R bölgesi;koordinat eksenleri ve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ parabolü ile sınırlı bölge ise $\iint_R xydA = ?$ $(\frac{1}{280})$

d) R bölgesi; x ekseni ve $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere $y = \sin x$ eğrisi ile sınırlı bölge ise $\iint_R xdA = ?$ (π)

e) R bölgesi;köşeleri $(0,0), (1,1)$ ve $(-2,1)$ olan üçgen bölgesi ise $\iint_R (1-x)dA = ?$ (2)

6) Aşağıdaki integrallerin sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dxdy$

b) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

c) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

d) $\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dydx + \int_1^3 \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dydx$

7) Kutupsal koordinatları kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\iint_R (x^2+y^2)dA; \quad R = \{(x,y); x^2+(y+2)^2 \le 4\}$ (24π)

b) $\iint_R \arctan \frac{y}{x} dA; \quad R = \{(x,y); x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ $(\frac{\pi^2}{16})$

c) $\iint_R \sin(x^2+y^2)dA; \quad R = \{(x,y); \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi\}$ $(-6\pi^2)$

8) $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dydx$ tekrarlı integralinin sırasını değiştirerek hesap ediniz. Cevap:$\frac{e-1}{3}$

9) Aşağıdaki bölgelerin alanlarını çift katlı integral kullanarak hesaplayınız.

a) Alttan R bölgesi ($R: y = x^2$ ve $y = 1$ ile sınırlı)nın ve üstten $z = 4-x-y$ eğrisini sınırladığı cismin hacmini bulunuz.$(\frac{68}{15})$

b) R bölgesi $xy = 1, y = x$ ve $x = e$ doğrularının sınırladığı sınırlı bölge $(\frac{3}{2})$

c) R bölgesi; $x = y^2$ ve $x = 4-3y^2$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\frac{16}{3})$

d) $x^2+2y^2 = 1$ ve $2x^2+y^2 = 1$ elipslerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3})$

e) $x^2+y^2 = 4$ ve $y^2-2x^2 = 1$ eğrilerinin sınırladığı bölge $(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}))$

10) R, düzlemin birinci bölgesinde $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$ eşitsizlikleri ile tanımlanıyor. $I = \iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ iki katlı integralini kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesap ediniz. Cevap:$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi^2}{16}$

11) Kutupsal koordinatlar kullanarak $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2+y^2+z^2 = 1$ küresinin altında kalan cismin hacmini bulunuz. Cevap:$\frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ birim küp

12) İki katlı interal kullanarak aşağıda verilen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

a) S cismi; koordinat düzlemleri,$x = 1$ ve $y = 2$ düzlemleri ile $z = x+2y+1$ düzleminin sınırladığı cisim,(7)

b) Koordinat düzlemleri ile $x+2y = 2$ ve $x+4y+2z = 8$ düzlemlerinin 1. kuadrantta sınırladığı cisim, $(\frac{23}{3})$

c) $x = 0, z = 0, x+3y = 6, 2x+3 = 12$ ve $x+y+z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, (12)

d) $x^2+y^2 = 1$ dik silindiri ile $z = 0$ ve $2x+2y+3z = 6$ düzleminin sınırladığı cisim, $(\frac{1}{3})$

13) $I = \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dydx$ tekrarlı integrali D bölgesi üzerinde iki katlı integrale karşılık gelmektedir. D bölgesini çizdikten sonra integralin sırasını değiştirin ve integrali hesaplayın.
Cevap:2

14) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{4+x^5}}dxdy =?$ ($dydx$ e çevrilirse sonuç $\frac{4}{5}$ bulunur.)

15) $R = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2, 0 \leq x\}$ olmak üzere $\displaystyle\iint_R (1+x^2+y^2)dxdy =?$ ($(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \to$ sonuç $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{16}$)

16) $R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, y \leq 2x\}$ (veya $x^2+y^2=1$ çemberi içerisinde ve $y=2x$ doğrusu altında kalan bölge) olmak üzere

$$\iint_R 2e^{\frac{-3}{5}x^3+x}ydA =?$$

(Cevap: $e^{\frac{-2}{3\sqrt{5}}-\frac{-2}{9\sqrt{5}}}$)

17) $C_1 : (x-1)^2+y^2=1$ ve $C_2 : (x-2)^2+y^2=1$ olarak tanımlanıyor.R, C_2 nin içinde ve C_1 in dışındaki noktaların kümesi olmak üzere

$$\iint_R y^2dA$$

integralini

a) $dxdy$ in integrali olarak

b) $dydx$ in integrali olarak

c) Kutupsal koordinatlarda integral olarak ifade ediniz.

(Cevap:

a) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2dxdy + 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{2+\sqrt{1-y^2}} y^2dxdy$

b) $\displaystyle 2\int_{\frac{3}{2}}^{2}\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2dydx + 2\int_2^3\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y^2dydx$

c) $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_{2\cos\theta}^{2\cos\theta+\sqrt{4\cos^2\theta-3}} r^2\sin^2\theta rdrd\theta$

18) $f(x,y) = \dfrac{1+\sin(x^2+y)}{1+x^2}$ olmak üzere $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\ln y} f(x,y)dxdy + \int_{2\pi}^{\infty}\int_{\ln(y-2\pi)}^{\ln y} f(x,y)dxdy$ değerini bulunuz. (Cevap:$2\pi^2$)

19) Aşağıdaki üç katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdxdy \quad (18)$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 x\cos y\sin z dxdydz \quad (3)$

c) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\ln z}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdydz \quad \left(2\ln 2 - \frac{7}{4}\right)$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}dydx \quad \left(\frac{\pi^2}{8}\right)$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{x+z} x^2yz^2\,dydxdz \quad (0)$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{r}^{\frac{1}{\sqrt{2-r^2}}} 3dzrdrd\theta \quad (\pi(6\sqrt{2}-8))$

g) $\displaystyle\int_{0}^{2}\pi\int_{0}^{\frac{\theta}{2\pi}}\int_{0}^{3+24r^2} dzrdrd\theta \quad \left(\frac{17\pi}{5}\right)$

20) $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri tarafından sınırlanan bölgenin hacmini katlı integral ile hesaplayınız. (16π)