7. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y+\sin x}{x+\sin y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1\quad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını gösteriniz.

Fonksiyonun (0,0) noktasındaki limitini araştıralım; (0,0) noktasına $y=x$ doğrusu ile yaklaşalım;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y+\sin x}{x+\sin y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

(0,0) noktasına $y=-x$ doğrusu ile yaklaşalım:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y+\sin x}{x+\sin y}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin x}{x+\sin(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}-1=-1$$

olup $(x,y)=(0,0)$'da iki limit değeri birbirine eşit olmadığından fonksiyonun (0,0) noktasında limiti yoktur, dolayısıyla sürekli değildir.

8. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki ikinci dereceden Taylor Polinomu $P_2(x)=1+x+x^2$ dir. f fonksiyonunun $x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ için aldığı değerler $P_2(x)$ polinomu kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanırsa oluşan hatayı üstten sınırlayınız.

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\underbrace{1+x+x^2}_{P_2(x)}+R_2(x)\quad \text{olup}$$

Hata $=|f(x)-P_2(x)|=|R_2(x)|=\left|\dfrac{3!\,(1-c)^{-4}}{3!}\cdot(x-0)^3\right|$, $c\in\left(\frac{-1}{4},\frac{1}{4}\right)$

$R_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-0)^3$

$=\dfrac{1}{|1-c|^4}|x|^3$

(*)'dan

$<\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{4^3}$

$=\frac{4}{81}$

$f(x)=(1-x)^{-1}$ olup

$f'''(c)=3!\,(1-c)^{-4}$

$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}<1-c<\frac{5}{4}$

$|1-c|>\frac{3}{4}$

$\frac{1}{|1-c|}<\frac{4}{3}$ --(*)

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

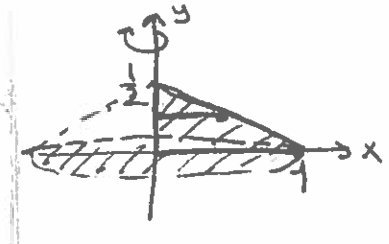
TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2018-2019 YAZ DÖNEMİ
MAT 102, MATEMATİK II, FİNAL SINAVI
31 TEMMUZ 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (12p.)	2. (13 p.)	3. (13 p.)	4. (13 p.)	5. (13 p.)	6. (13 p.)	7. (13 p.)	8. (10 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. $x+2y=1$ doğrusu, x-ekseni ve y-ekseni ile sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin yüzey alanını **integral** ile hesaplayınız.



Yüzey Alanı Formülü : $\int 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ olup

$$Y.A=\int_0^{1/2}2\pi(1-2y)\sqrt{1+(-2)^2}\,dy+\pi(1)^2$$

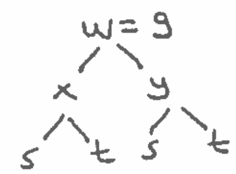
$$=2\sqrt{5}\,\pi\int_0^{1/2}(1-2y)\,dy+\pi$$

$$=2\sqrt{5}\,\pi\left[y-y^2\Big|_0^{1/2}\right]+\pi$$

$$=\pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

2. $w=g(ts^2,\frac{s}{t})$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=xy$ ve $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{2}$ olduğuna göre $\frac{\partial w}{\partial t}\big|_{(s,t)=(1,2)}$ değerini hesaplayınız.

$w=g(x,y)\ni x=ts^2$ ve $y=\frac{s}{t}$



$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

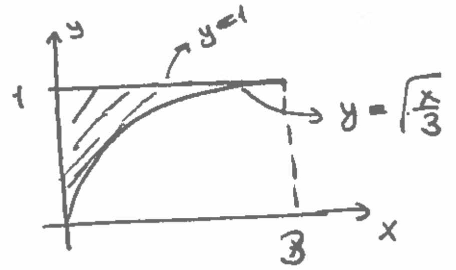
$$=xy\cdot s^2+\frac{x^2}{2}\left(\frac{-s}{t^2}\right)$$

$$=ts^2\cdot\frac{s}{t}\cdot s^2+\frac{t^2s^4}{2}\left(\frac{-s}{t^2}\right)$$

$$=s^5-\frac{s^5}{2}$$

$$=\frac{s^5}{2}\quad\text{olup}\quad\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{(s,t)=(1,2)}=\frac{s^5}{2}\Big|_{(1,2)}=\frac{2^5}{2}=2^4=16$$

3. $\displaystyle\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$ integralini hesaplayınız.



$0 \le x \le 3$

$\sqrt{\frac{x}{3}} \le y \le 1$

$D = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3,\ \sqrt{\frac{x}{3}} \le y \le 1 \right\}$

$$\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}dy\,dx = \int_0^1\int_0^{3y^2} e^{y^3}dx\,dy = \int_0^1 e^{y^3}\left[x\Big|_0^{3y^2}\right]dy$$

$$= \int_0^1 e^{y^3}.3y^2\,dy$$

$$= \int_0^1 e^u\,du$$

$$= e^u\Big|_0^1$$

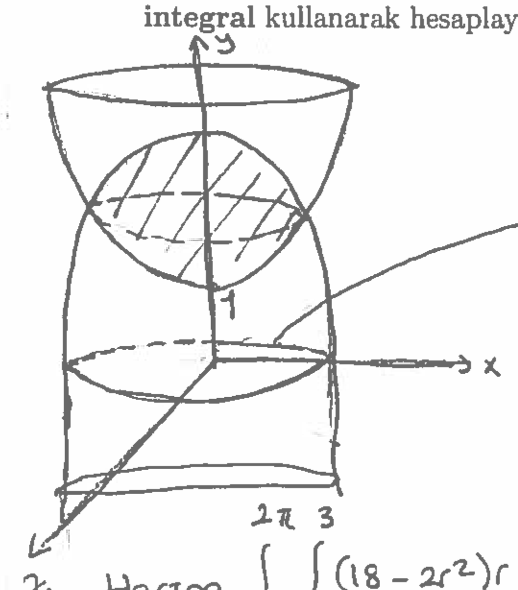
$$= e-1$$

$y^3=u$ olsun. $3y^2dy = du$ olur.

$y=0$ için $u=0$

$y=1$ için $u=1$ dir.

4. Üstten $z = 19 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve alttan $z = x^2+y^2+1$ paraboloidi ile sınırlanan bölgenin hacmini **integral** kullanarak hesaplayınız.



$19 - x^2 - y^2 = x^2+y^2+1$

$18 = 2x^2+2y^2$

$9 = x^2+y^2$

Polar dönüşüm yapılırsa; $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$dxdy = r\,dr\,d\theta$ olup

Taralı Bölge : $\{(r,\theta) : r\le 3$ ve $\theta\in[0,2\pi]\}$

$$\text{Hacım } \int_0^{2\pi}\int_0^3 (18-2r^2)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[9r^2 - \frac{r^4}{2}\right]\Big|_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{81}{2}d\theta$$

$$= \frac{81}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 81\pi$$

5. $h(x,y) = \sqrt{x-e^y}$ fonksiyonunun $(5,0)$ noktasındaki teğet düzlem denklemini bulunuz ve bu denklemden yararlanarak $\sqrt{4,98-e^{-0.03}}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.

Teğet Düzlem Denklemi : $z - z_0 = h_x(x_0,y_0)(x-x_0) + h_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$(x_0,y_0) = (5,0)$ olmak üzere $h(5,0) = \sqrt{5-e^0} = \sqrt{4} = 2 = z_0$

$h(x,y) = (x-e^y)^{1/2}$

$h_x(x,y) = \frac{1}{2}(x-e^y)^{-1/2}$

$h_y(x,y) = \frac{1}{2}(x-e^y)^{-1/2}(-e^y)$

$z - 2 = \frac{1}{2}(5-e^0)^{-1/2}(x-5) + \frac{1}{2}(5-e^0)^{-1/2}.(-e^0)(y-0)$

$\boxed{z = 2 + \frac{1}{4}(x-5) - \frac{1}{4}.y}$ Teğet Düzlem Denklem

$$\sqrt{4,98-e^{-0,03}} \approx 2 + \frac{1}{4}(4,98-5) - \frac{1}{4}(-0,03)$$

$$= 2,0024$$

6. $f(x,y) = xy^2$ fonksiyonunun $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 = 12\}$ bölgesi üzerindeki maksimum ve minimum değerlerini hesaplayınız.

$g(x,y) := x^2+4y^2 = 12$ olmak üzere $\nabla f = \lambda\nabla g$

$\langle y^2, 2xy\rangle = \lambda\langle 2x, 8y\rangle$

(1)... $y^2 = 2x\lambda$

(2)... $2xy = \lambda 8y$

(3)... $x^2+4y^2 = 12$

denklemlerini sağlayan (x,y) ikililerini araştıralım.

(1) ve (2)'den λ'yı yalnız bırakalım: $\lambda = \frac{y^2}{2x} = \frac{2xy}{8y}$ ise

$8y^3 = 4x^2y \Rightarrow 4y(2y^2-x^2) = 0$

i) $y=0 \Rightarrow x^2 = 12$

$x = \mp 2\sqrt{3}$ $\quad f(\mp 2\sqrt{3}, 0) = 0$

ii) $2y^2 = x^2 \Rightarrow 6y^2 = 12$

$y^2 = 2$

$y = \mp\sqrt{2}$, $x = \mp 2$

$f(2,\mp\sqrt{2}) = 4 \qquad f(-2,\mp\sqrt{2}) = -4$

Sonuç olarak $f(2,\mp\sqrt{2}) = 4$ maksimum değer

$f(-2,\mp\sqrt{2}) = -4$ minimum değer