5. Aşağıdaki kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n(x+1)^n}{2^n(n+1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1.(x+1)^{n+1}}{2^{n+1}.(n+2)} \cdot \frac{2^n.(n+1)}{n.(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot|x+1|$$

$$= \frac{1}{2}|x+1|$$

$\frac{|x+1|}{2}<1 \Leftrightarrow |x+1|<2$ olup yakınsaklık yarıçapı 2'dir.

$|x+1|<2 \Leftrightarrow -3<x<1$ dır.

$x=-3$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n(-2)^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ olup Genel Terim Testi'nden $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$ seri ıraksaktır.

$x=1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n 2^n}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ olup

GENEL TERİM TESTİNDEN

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1} \nexists$

yani, IRAKSAKTIR.

YAKINSAKLIK ARALIĞI $x\in(-3,1)$

6. $r=3$ eğrisinin dışında ve $r=2(1+\sin\theta)$ eğrisinin içinde kalan bölgeyi çiziniz ve bu bölgenin alanını bir integral olarak ifade ediniz (**İntegrali hesaplamayınız!**)

$3=2+2\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}=\sin\theta$ $\quad \theta=\frac{\pi}{6}$ ve $\theta=\frac{5\pi}{6}$ da eğriler kesişir.

$\theta=0$ için $r=2$

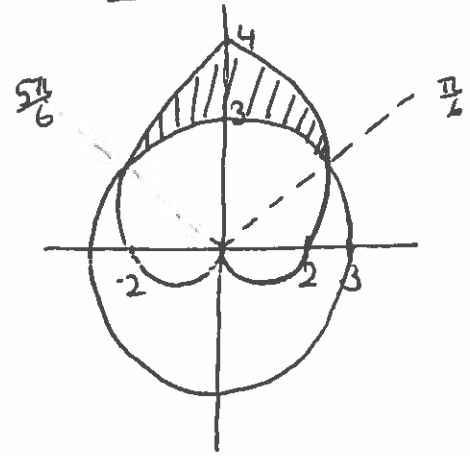
$\theta=\frac{\pi}{6}$ için $r=3$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ için $r=4$

$\theta=\frac{5\pi}{6}$ için $r=3$

$\theta=\pi$ için $r=2$

$\theta=\frac{3\pi}{2}$ için $r=0$



$$A_{lan} = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[(2+2\sin\theta)^2-9\right]d\theta$$

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2018-2019 YAZ DÖNEMİ
MAT 102, MATEMATİK II, ARASINAV
27 HAZİRAN 2019

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (20p.)	2. (13 p.)	3. (14 p.)	4. (20 p.)	5. (20 p.)	6. (13 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. $f(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonunun $x=2$ noktası komşuluğundaki Taylor serisini bulunuz ve yakınsaklık aralığını belirleyiniz.

$$f(x)=\ln(1+x)=\ln(3+(x-2))=\ln\left(3.\left(1+\frac{x-2}{3}\right)\right)$$

$=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)$ fonksiyonunun seri açılımı için

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, $|x|<1$ eşitliğinden yararlanalım. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa;

$\int\frac{1}{1+x}dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \Leftrightarrow \ln|1+x|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ elde edilir.

Öyleyse, $\ln(1+x)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-2}{3}\right)=\ln 3+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}$, $|x-2|<3 \Leftrightarrow -1<x<5$ dır.

Burada yakınsaklık yarıçapı 3 olup

$x=-1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}$ IRAKSAK (Harmonik Seri p testinden)

$x=5$ için $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{5-2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ YAKINSAK (Alterne Harmonik Seri)

2. (a) Genel terimi

$$a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$$

olan dizinin yakınsak/ıraksak olup olmadığını belirleyiniz. Yakınsak ise limitini bulunuz.

$f(x) = \left(\frac{3}{x}\right)^{1/x}$ alınırsa $n = x = 1, 2, \ldots$ için $f(n) = a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{1/n}$

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{1/x}$ $\quad 0^0$ Belirsizliği.

$y = \left(\frac{3}{x}\right)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{3}{x}\right)$ olup $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{3}{x}\right)}{x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-3/x^2}{3/x}}{1}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$

Buradan $\ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$ olup dizi yakınsaktır.

(b) Sınırlı fakat yakınsak olmayan dizilere bir örnek veriniz. $\quad a_n = (-1)^n$

3. (a) Aşağıdaki serinin yakınsak/ıraksak olup olmadığını belirleyiniz

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n}.$$

$n \geq 3$ için $\log n > 1$

$(\log n)^3 > 1^3$

$\frac{(\log n)^3}{n} > \frac{1}{n}$ olup Karşılaştırma Testi'nden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{n}$ serisi de ıraksaktır.

(b) Şartlı yakınsak fakat mutlak yakınsak olmayan serilere bir örnek veriniz.

Genel terimi $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ olan $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ serisi şartlı yakınsak fakat mutlak yakınsak değildir.

4. $y = 3x^2 + 1$, $y = 6x + 1$ eğrileri ile sınırlanan bölgeyi göz önüne alalım.

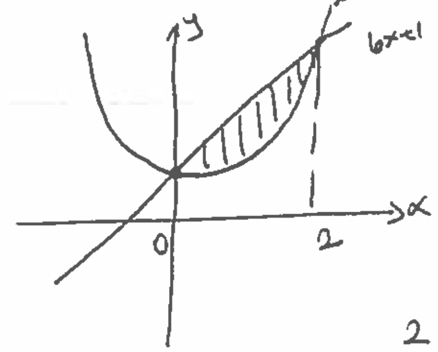
(a) Bölgeyi çiziniz ve çevresinin uzunluğunu bir integral olarak ifade ediniz (**İntegrali hesaplamayınız!**)

$3x^2 + 1 = 6x + 1$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

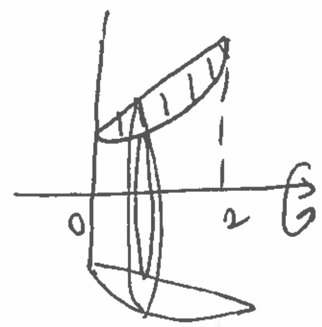
$x = 0$ ve $x = 2$ noktasında eğriler kesişir.



Yay uzunluğu $= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$

Çevre Uzunluğu $= \int_0^2 \sqrt{1+(6x)^2}\,dx + \int_0^2 \sqrt{1+6^2}\,dx$

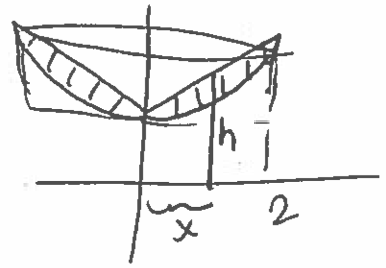
(b) Bölgenin $x-$*ekseni* etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel (katı) cismin hacmini **Disk Metodu** kullanarak bir integral olarak ifade ediniz (**İntegrali hesaplamayınız!**)



$V = \int_0^2 \pi\left[R_{dış}^2 - R_{iç}^2\right]dx$

$= \int_0^2 \pi\left[(6x+1)^2 - (3x^2+1)^2\right]dx$

(c) Bölgenin $y-$*ekseni* etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel (katı) cismin hacmini **Silindirik Kabuk Metodu** kullanarak bir integral olarak ifade ediniz (**İntegrali hesaplamayınız!**)



$h = 6x+1 - (3x^2+1)$

$V = \int_0^2 2\pi x \cdot \left[(6x+1) - (3x^2+1)\right]dx$