

# = CEVAP ANAHTARI =



TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2021-2022 GÜZ DÖNEMİ  
MAT 101, MATEMATİK I, ARA SINAVI  
6 KASIM 2021

Ad Soyad:

No:

İMZA:

1. (10+10)	2. (4+4+7)	3. (10)	4. (10+10)	5. (15)	6. (20)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapmak gereklidir. Süre: 100 dk. Başarılar...

1. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) L'Hospital kuralını kullanmadan hesaplayınız.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) + \sin(3x)}{4x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos(2x)}{4x} + \frac{\sin(3x)}{4x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - (1 - 2\sin^2(x))}{4x} + \frac{3 \sin(3x)}{3 \cdot 4x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \cdot \sin(x) \sin(x)}{4x} + \frac{3}{4} \frac{\sin(3x)}{3x} \right]$$

NOT:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

ve  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$

dir.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) + \frac{3}{4} \frac{\sin(3x)}{3x} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1$$

$$= \frac{3}{4}$$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sqrt{25+x}) - \tan(\sqrt{25})}{x}$

$f(x) = \tan(\sqrt{25+x})$  olmak üzere  $f(0) = \tan(\sqrt{25})$  ve

$f'(x) = \sec^2(\sqrt{25+x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25+x}}$  dir.

Türevin limit tanımından;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sqrt{25+x}) - \tan(\sqrt{25})}{x} = f'(0)$

$$= \sec^2(\sqrt{25}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{25}}$$

$$= \frac{\sec^2(\sqrt{25})}{10}$$

2. Verilen  $y = f(x)$  fonksiyonlarının birinci türevlerini hesaplayınız.

$$(a) y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - \pi + 7x^3 = 9(x)^{-\frac{2}{3}} - \pi + 7x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} + 21x^2$$

$$(b) y = \frac{\ln(101)}{\cos(4x)} + \sin(x+e) = \ln(101) \cdot \sec(4x) + \sin(x+e)$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln(101) [\sec(4x) \tan(4x) \cdot 4] + \cos(x+e)$$

$$(c) y = 101^x \cdot \ln(e^{5x} - \tan(2x))$$

$$\frac{dy}{dx} = 101^x \cdot \ln(101) \cdot \ln(e^{5x} - \tan(2x)) + 101^x \cdot \frac{5e^{5x} - 2\sec^2(2x)}{e^{5x} - \tan(2x)}$$

3.  $x \cdot (xy - y^2) = x^2y^2 - y + 2$  kapalı ifadesi ile verilen eğrinin  $x = 0$  daki teğetinin denklemini bulunuz.

$$x(xy - y^2) - x^2y^2 + y - 2 = 0 \text{ ifadesinde } x=0 \text{ için } y=2 \text{ dir.}$$

Farklı her iki tarafının  $x$  ile göre türevini alalım;

$$1. (xy - y^2) + x \left( y + x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} \right) - (2xy^2 + x^2 \cdot 2y \frac{dy}{dx}) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$xy - y^2 + xy + x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy \frac{dy}{dx} - 2xy^2 - 2x^2y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 - 2xy - 2x^2y + 1) \frac{dy}{dx} + (xy - y^2 + xy - 2xy^2) = 0$$

$$x=0 \text{ için } 1. \frac{dy}{dx} + (-y^2) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \text{ ve } y=2 \text{ olduğundan } \frac{dy}{dx} = 4$$

dur. Bu değer  $x=0$  noktasındaki teğetin eğimidir. 0 halde teğet denklemi

$$y-2 = 4(x-0) \Rightarrow y = 4x+2 \text{ dir.}$$

4. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 5\pi} \frac{2 - 2 \sin^2 x}{2 - 2 \cos^3 x} = \frac{2 - 2 \sin^2(5\pi)}{2 - 2 \cos^3(5\pi)} = \frac{2 - 2 \sin^2(\pi)}{2 - 2 \cos^3(\pi)}$$
$$= \frac{2 - 2 \cdot 0}{2 - 2 \cdot (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2e^{-x}}{3e^{-x} - 4e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} + 2)}{e^{-x}(3 - 4e^{2x})}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 2}{3 - 4e^{2x}}$$
$$= \frac{0 + 2}{3 - 0}$$
$$= \frac{2}{3}$$

5. Dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutunun eni 4 cm/dk ve boyu 3 cm/dk hızla artırılırken, yüksekliği ise 6 cm/dk hızla azaltılmaktadır. Buna göre, kutunun eni 5 cm, boyu 6 cm ve yüksekliği 4 cm olduğu anda hacmindeki değişim hızını bulunuz.

En = x cm, Boy = y cm ve yükseklik = z cm olsun.

Hacim  $V = x \cdot y \cdot z$  olup  $\frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y \cdot z + x \cdot \frac{dy}{dt} \cdot z + x \cdot y \cdot \frac{dz}{dt}$  olur.

$$\begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4 \\ \frac{dy}{dt} = 3 \\ \frac{dz}{dt} = -6 \end{cases} \text{ iken } \frac{dV}{dt} = 4 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot (-6)$$
$$= -24$$

Hacim 24 cm/dk hızla azalmaktadır.

6.  $f(x) = \frac{1+e}{e+e^x}$  fonksiyonunun tanım kümesini, artan azalan olduğu aralıkları, eğer varsa asimtotlarını, maksimum/minimum/büküm noktalarını ve büyüklüğünü inceleyerek grafiğini çiziniz.

$$\left( f'(x) = -\frac{(1+e)e^x}{(e+e^x)^2} \text{ ve } f''(x) = \frac{(1+e)e^x(e^x-e)}{(e+e^x)^3} \text{ bilgilerini kullanınız} \right)$$

Tanım kümesi =  $\mathbb{R}$

$x=0$  için  $y=f(0) = \frac{1+e}{e+1} = 1$  olup fonksiyon  $(0,1)$  noktasından geçer.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e}{e+e^x} = 0$  olup  $x \rightarrow +\infty$  iken  $y=0$  yatay asimtottur.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e}{e+e^x} = \frac{1+e}{e} = \frac{1}{e} + 1$  olup  $x \rightarrow -\infty$  iken  $y = \frac{1}{e} + 1$  yatay asimtottur.

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1+e}{e+e^x} = +\infty$  (veya  $-\infty$ ) olacak şekilde  $c \in \mathbb{R}$  mevcut olmadığından dikey asimtot yoktur.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+e}{e+e^x} - (ax+b) \right) = 0$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{R}$  mevcut olmadığından eğik asimtot yoktur.

$f'(x) = -\frac{(1+e)e^x}{(e+e^x)^2} < 0$  olduğundan kritik nokta yoktur,  $f$  fonksiyonu azalan. Yerel minimum (maksimum) yoktur.

$f''(x) = \frac{(1+e)e^x(e^x-e)}{(e+e^x)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x - e = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f''$ 

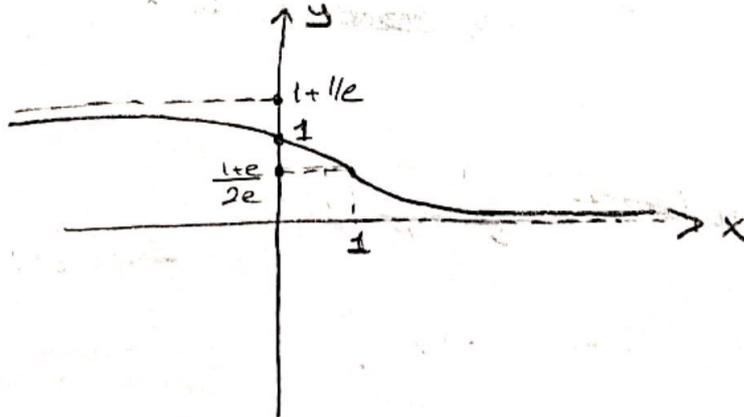
1
-
+

  
 $x=1$  Büküm Noktası

İzaret Tablosu:

	1	
$f'$	-	-
$f''$	-	+

$x=1$  için  $f(1) = \frac{1+e}{2e} < \frac{1+e}{e}$



Fonksiyonun Grafiği.