= CEVAP ANAHTARI =

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2021-2022 GÜZ DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
7 ARALIK 2021

Ad Soyad: No: İMZA:

1. (15)	2. (10)	3. (5+10+10)	4. (12+12)	5. (16)	6. (10)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapmak gereklidir. Süre: 100 dk. Başarılar...

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 38$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ **kapalı** aralığındaki **mutlak maksimum** ve **mutlak minimum** değerlerini hesaplayınız. Nedenini açıklayınız.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 38$ fonksiyonu $[-1,3]$ kapalı aralığında tanımlı ve süreklidir. Fonksiyonun $(-1,3)$ aralığındaki kritik noktalarını bulalım.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48 = 12x^2(x-1) - 48(x-1)$

$= (12x^2 - 48)(x-1) = 12(x^2-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$ veya $x = 1$

olur. Fakat $\underset{\text{K.N. değil}}{-2 \notin (-1,3)}$. O halde $x = 1$ ve $x = 2$ kritik noktadır.

$f(1) = 3 - 4 - 24 + 48 + 38 = 61$

$f(2) = 3.16 - 4.8 - 24.4 + 48.2 + 38 = 54$

Uç noktalarda: $f(-1) = 3.1 - 4.(-1) - 24.1 + 48(-1) + 38 = -27$

$f(3) = 3.81 - 4.27 - 24.9 + 48.3 + 38 = 101$

Mutlak minimum noktası $x = -1$, mutlak minimum değeri $f(-1) = -27$.

Mutlak maksimum noktası $x = 3$, mutlak maksimum değeri $f(3) = 101$.

5. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını belirleyiniz. Cevabınızı çember içine alınız. Açıklama yapmanıza gerek yoktur.

(a) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $[-101, 102]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta mutlak maksimumu vardır.

(b) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $(-102, 101)$ aralığında sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta mutlak minimumu vardır.

(c) **DOĞRU** / **YANLIŞ** Bir fonksiyon sürekli ise türevlenebilirdir.

(d) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $\int_1^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2} - e^{-1}$

(e) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$

(f) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsaktır.

(g) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $\int_{-101}^{101} \frac{dx}{x^5} = 0$

$\int_{-101}^{0} \frac{dx}{x^5} + \underbrace{\int_0^{101} \frac{dx}{x^5}}_{\text{IRAKSAK}} \Rightarrow$ integral IRAKSAK

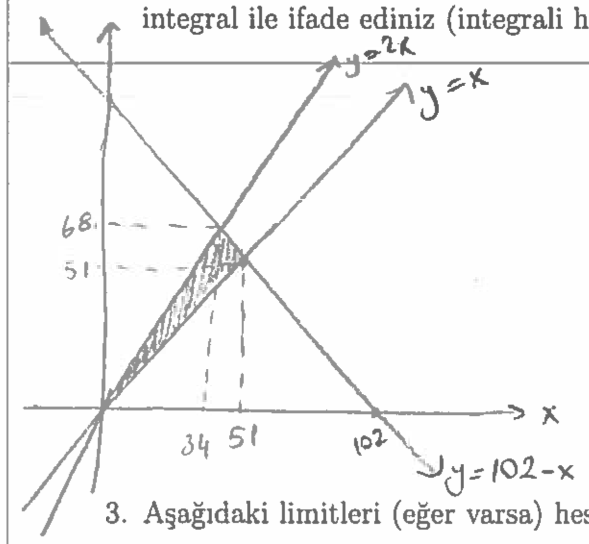
(h) **DOĞRU** / **YANLIŞ** $\int_{-102}^{102} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = 0$

6. $\int_1^\infty \frac{5 + e^{-x^2}}{x}\,dx$ integralinin yakınsaklığı/ıraksaklığını belirleyiniz.

$f(x) = \frac{5+e^{-x^2}}{x} \geq \frac{5}{x} := g(x)$ ve $\int_1^\infty \frac{5}{x}\,dx$ ıraksak olduğundan (p-testi)

Direkt Karşılaştırma Testinden $\int_1^\infty \frac{5+e^{-x^2}}{x}\,dx$ de ıraksaktır.

2. $y = x$, $y = 2x$ ve $y + x = 102$ doğruları arasında kalan kapalı bölgeyi çiziniz. Bu bölgenin alanını integral ile ifade ediniz (integrali hesaplamanıza gerek yoktur).



I. Yol: $\int_0^{34} (2x-x)\,dx + \int_{34}^{51} [(102-x)-x]\,dx$

II. Yol: $\int_0^{51} \left(y-\frac{y}{2}\right)dy + \int_{51}^{68} \left[(102-y)-\frac{y}{2}\right]dy$

3. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^{102}-x^{101}}{x^{100}+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-x^3}-1+x^3}{x^6}\right) \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 e^{-x^3}+3x^2}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(1-e^{-x^3})}{6x^5}$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^3}}{x^3} \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{3x^2}e^{-x^3}}{\cancel{3x^2}}$

$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} e^{-x^3} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^x (e^{t^3}-1)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{t^3}-1)dt}{x^4} \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{4x^3}$

$\underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^2}e^{x^3}}{12x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}}{4} = \frac{1}{4}$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $\quad x+1 = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$ $\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2\cancel{u}\,du}{(u^2-1)\cancel{u}} = \int \frac{2\,du}{(u-1)(u+1)}$

$\frac{2}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+B(u-1)}{(u-1)(u+1)}$ $\quad u=1$ için $2A=2 \Rightarrow A=1$; $\quad u=-1$ için $-2B=2 \Rightarrow B=-1$

$\int \frac{2\,du}{(u-1)(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$

$= \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = \ln|u-1| - \ln|u+1| + C$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

(b) $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$ $\quad x = 2\tan\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ ve $x^2 = 4\tan^2\theta$ dır.

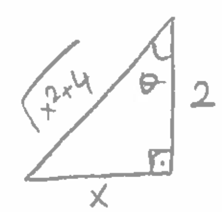
$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4+4\tan^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{[4\underbrace{(1+\tan^2\theta)}_{\sec^2\theta}]^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(2^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(\sec^2\theta)^{3/2}}$

$= \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2^3\cdot\sec^3\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta + C$

$= \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$

$x = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{2}$

$\Downarrow$



$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$