

8. $y = x^4 - 4x^2$ fonksiyonunun tanım kümesini, eğer varsa eksenleri kestiği noktaları, artan azalan olduğu aralıkları, eğer varsa asimptotlarını, maksimum/minimum (ekstremum) noktalarını ve büyüklüğünü (konkavlığı) inceleyerek grafiğini çiziniz (birinci ve ikinci türev bilgilerinizi kullanınız).

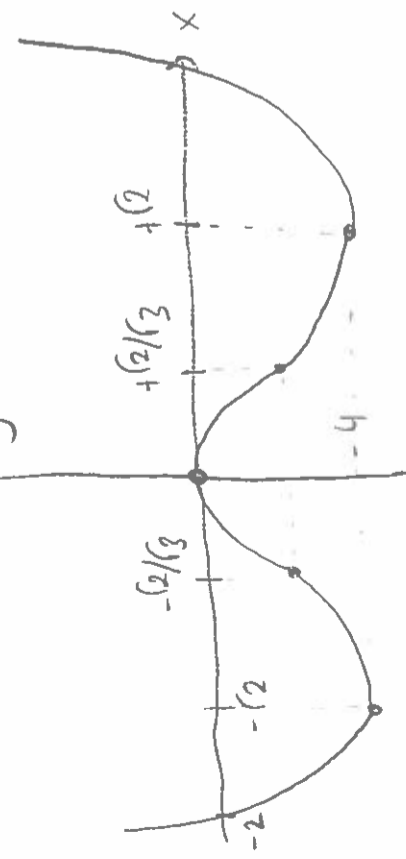
$y = x^4 - 4x^2$, Eksenleri kestiği noktalar
 $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = 0$
 $y = 0, x = 0, x = 2, x = -2$

T.K = \mathbb{R}
 $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

$y'' = 12x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 8$
 $x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$

	$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$+\sqrt{2}$	
y'	-	+	+	-	-	+
y''	+	+	-	-	+	+
	Artan	Artan	Azalan	Azalan	Artan	Artan

$x = -\sqrt{2}$ ve $x = +\sqrt{2}$ noktalarında mutlak minimum, $x = 0$ noktasında yerel maksimum vardır.
 Fonksiyon $(-\infty, -\sqrt{2})$ ve $(0, +\sqrt{2})$ aralığında artandır. $x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ve $(+\sqrt{2}, +\infty)$ aralığında azalır.
 noktalardır.



Adı Soyadı:	No:	İMZA:						
1. (10p.)	2. (10p.)	3. (5p.)	4. (10p.)	5. (10p.)	6. (20 p.)	7. (10p.)	8. (25p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. Aşağıdaki limitlerini hesaplayınız. (L'Hopital kuralını kullanmayınız!)

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x+\sin x}{x+\cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{2}{x} - 1 + \frac{\sin x}{x})}{x(1 + \frac{\cos x}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0-1+0}{1+0} = -1$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^2 - x - 2)}{x+1} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)} = -3$

2. $y = \cos^3(\ln(x^2 + 3))$ fonksiyonun türevini zincir kuralını kullanarak hesaplayınız.

$x^2 + 3 = u$
 $\ln u = v$
 $\cos v = z$
 $z^3 = y$
 diyalim. $\frac{dy}{dz} = 3z^2$ $\frac{dz}{dv} = -\sin v$
 $\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}$ $\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot (\cos^2(\ln(x^2 + 3))) \cdot (-\sin(\ln(x^2 + 3))) \cdot \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x$

3. $x \geq 2$ olmak üzere $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ fonksiyonu için $\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=-1}$ hesaplayınız.

$x^3 - 3x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$
 $x \geq 2$ olduğundan $x = 3$ alınır.

$\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{x=-1} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=3}} = \frac{1}{3x^2 - 6x} \Big|_{x=3} = \frac{1}{9}$

4. $y \sin x = x^3 + \cos y$ eşitliğini sağlayan $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ değerini hesaplayınız. Bu fonksiyona,

$(0, \frac{\pi}{2})$ noktasında çizilen teğetin denklemini bulunuz.

$y' \sin x + y \cos x = 3x^2 - y' \sin y$

$y'(\sin x + \sin y) = 3x^2 - y \cos x$

$y' = \frac{3x^2 - y \cos x}{\sin x + \sin y} = \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{0+1} = -\frac{\pi}{2}$

$x=0$

Teğet denklemi; $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x)$

$y = -\frac{\pi}{2} \cdot x + \frac{\pi}{2}$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ fonksiyonun türevini, türevin (limit ile verilen) tanımını kullanarak hesaplayınız.

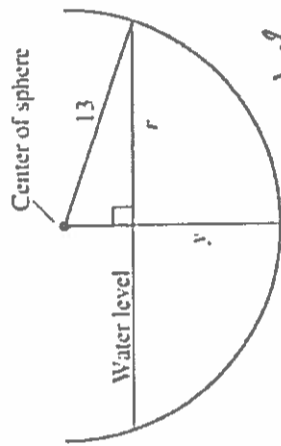
$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2}}{h(\sqrt{x+h+2})(\sqrt{x+2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})}{h(\sqrt{x+h+2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+2 - x-h-2}{h \cdot (\sqrt{x+h+2})(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2})} = -\frac{1}{(x+2)(2\sqrt{x+2})}$

6. Şekildeki su tankından dakikada 6 m^3 su boşalmaktadır. Su seviyesinin y metre olduğu anda suyun hacmi $V = \frac{\pi}{3}y^2(39 - y)$ 'dir.

- a) Tanktaki suyun seviyesi 8 m olduğunda su seviyesindeki değişim hızı nedir?
- b) Tanktaki suyun seviyesi y metre olduğunda r ne olur?
- c) Tanktaki suyun seviyesi 8 m olduğunda r 'nin değişim hızını bulunuz.

a) $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left[2y \frac{dy}{dt} (39-y) - y^2 \frac{dy}{dt} \right]$
 $\Rightarrow -6 = \frac{\pi}{3} \left[2 \cdot 8 \cdot \frac{dy}{dt} \cdot 31 - 8^2 \frac{dy}{dt} \right] \Rightarrow -6 = \frac{\pi}{3} \cdot 54 \cdot 8 \cdot \frac{dy}{dt}$
 $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{24\pi}$



b) $r^2 + (13-y)^2 = 13^2 \Rightarrow r^2 - 26y + y^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{26y - y^2}$
c) $r = \sqrt{26y - y^2} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{26 \frac{dy}{dt} - 2y \frac{dy}{dt}}{2\sqrt{26y - y^2}} \Rightarrow \frac{dr}{dt} \Big|_{y=8} = \frac{-13 \cdot \frac{1}{24\pi} + 8 \cdot \frac{1}{24\pi}}{\sqrt{26 \cdot 8 - 8^2}} = \frac{\frac{5}{24\pi}}{12} = -\frac{5}{288\pi}$

7. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & 1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} + b, & x \geq 3 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olması için a ve b değerlerini bulunuz.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} + a = 1+a = f(1)$

Süretlilik şartından $2 = 1+a \Rightarrow a = 1$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x} + a = \frac{1}{3} + a = \frac{1}{3} + 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} + b = b = f(3)$

Süretlilik şartından $\frac{4}{3} = b$ bulunur.