-Cevap Anahtarı-

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2017-2018 BAHAR DÖNEMİ
MAT 101, MATEMATİK I, FİNAL SINAVI
1 NİSAN 2018

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Adı-Soyadı: No: İMZA:

1. (2+3+5+5 p.)	2. (10 p.)	3. (5+5 p.)	4. (15 p.)	5.(6+8+6+6 p.)	6.(6+6+6+6 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. $f(x) = \ln^2(x)$ kuralı ile bir fonksiyon tanımlanıyor.

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

T.K. = $(0,\infty)$ ($\ln x$ pozitif sayılarda tanımlı old.)

(b) Varsa asimptotları bulunuz.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln^2(x) = +\infty \Rightarrow x=0$ düşey asimtottur.

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \ln^2(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ yatay asimtot yok

(c) f fonksiyonunun artan-azalan olduğu aralıkları ve yukarı konkav-aşağı konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$

$f''(x) = 2 \cdot \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

	0		1		e	
f'		$-$		$+$		$+$
f''		$+$		$+$		$-$
f		↘		↗		↗
		↘		↗		↗

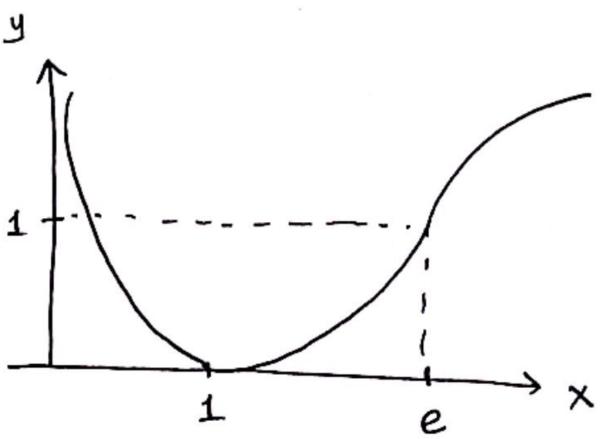
$[0,1]$ de azalan

$[1,\infty)$ da artan

$(0,e]$ de konveks

$[e,\infty)$ da konkav

(d) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



– Cevap Anahtarı –

2. $f^2(x) = \int_0^x f(t)sin(t)dt$ ve $f(\pi) = 1$ eşitliklerini sağlayan $f(x) \neq 0$ olmak üzere bir $f = f(x)$ fonksiyonu bulunuz.

Analizin Temel Teo. kullanılarak $\frac{d}{dx} f^2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\sin t\, dt$

$\Rightarrow 2f(x)f'(x) = f(x).\sin x$

$\Rightarrow f(x)[2f'(x) - \sin x] = 0$

$f(x) \neq 0,\ 2f'(x) - \sin x = 0 \quad \Rightarrow 2\int f'(x)dx = \int \sin x dx$

$\Rightarrow 2f(x) = -\cos x + c$

$2f(\pi) = -\cos\pi + c$

$2 = 1 + c \quad \Rightarrow c = 1$

$$\boxed{f(x) = \frac{-\cos x}{2} + \frac{1}{2}}$$

3. Aşağıdaki limit değerlerini hesaplayınız.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \tan x} = L$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği, L'Hop kullanalım

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x + x(1+\tan^2 x)} \underset{L.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right) \text{belirsizliği}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\tan^2 x + 1 + \tan^2 x + x[2\tan x(1+\tan^2 x)]} = 0$$

(b) $\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$

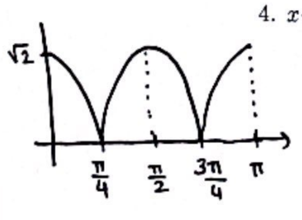
$y = (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(e^x + x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1} = 2$$

$\lim_{x\to 0} \ln y = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

4. $x-$ ekseni ve $[0, \pi]$ aralığında $y = \sqrt{1+\cos(4x)}$ eğrisi ararasında kalan alanı hesaplayınız.



$y = \sqrt{1+\cos(4x)} \geq 0 \qquad A = \int_0^\pi \sqrt{1+\cos(4x)}\, dx = \left(\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \text{ olduğundan}\right)$

$= \int_0^\pi |\sqrt{2}\cos 2x|\, dx$

$$A = \sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx\right] = \sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\right] = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right] = 2\sqrt{2}$$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^8}dt$ $f(t) = \frac{t}{1+t^8}$, $f(-t) = \frac{-t}{1+t^8} = -f(t)$ old.dan $f(t)$ tek fonksiyondur.

Simetrik aralıkta,

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{t}{1+t^8}dt = 0$

(b) $\int x\cos(3x)dx$ kısmi integrasyon uygulayalım ; $\int u\,dv = uv - \int v.du$

$u = x \quad dv = \cos 3x dx$

$du = dx \quad v = \frac{\sin 3x}{3}$

dönüşümleri uygulayarak

$\int x\cos(3x)\,dx = \frac{x.\sin(3x)}{3} - \int \frac{\sin(3x)\,dx}{3}$

$= \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$

(c) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^4(x)}dx = I$

$\cos^2(x) = u$

$2\cos x.\sin x.dx = du$

$-\sin(2x)dx = du$

olmak üzere

$I = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan(\cos^2 x) + c$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ,-1 \le x \le 0 \\ 2-\sqrt{4x-x^2} & ,\ 0 < x \le 2 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

$\int_{-1}^{0}(2x+2)dx + \int_{0}^{2} 2-\sqrt{4x-x^2}\,dx = x^2+2x\Big|_{-1}^{0} + \left(2x\Big|_{0}^{2} - \frac{\pi r^2}{4}\right) = -(1-2)+(4-0)-\pi$

$= 5-\pi$

$\int^{2} \sqrt{4x-x^2}\,dx$ integrali aşağıdaki şekilde çizilen çeyrek dairenin alanıdır.

$y = \sqrt{4-(x-2)^2}$

$y^2+(x-2)^2 = 4$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}dx$ II.Tip Genellestirilmis İnt.

$x=0$ için $\frac{1}{x^4}$ tanımsızdır.

$$\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^4}dx=\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^4}+\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^4}=\lim_{a\to 0^-}\int_{-2}^{a}\frac{dx}{x^4}+\lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{3}\frac{dx}{x^4}=\lim_{a\to 0^-}\left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{-2}^{a}+\lim_{b\to 0^+}\left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{b}^{3}=$$

$$=\lim_{a\to 0^-}\left(\frac{-1}{3a^3}-\frac{1}{24}\right)+\lim_{b\to 0^+}\left(\frac{-1}{24}+\frac{1}{3b^3}\right)=+\infty$$

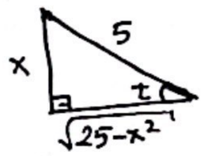
(b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}dx$

$x=5\sin t$

$dx=5\cos t\,dt$

dönüşümü yapılır

$$=\int\frac{5\cos t\,dt}{25\sin^2(t)\sqrt{25-25\sin^2 t}}=\int\frac{5\cos t\,dt}{25\sin^2 t\,.\,5|\cos t|}=\frac{1}{25}\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$



$$=\frac{1}{25}\int \operatorname{cosec}^2 t\,dt=\frac{-1}{25}\cot(t)+c=\frac{-1}{25}\cdot\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}+c$$

(c) $\int \sec^3(x)\tan(x)dx$

$\sec x=u$

$\sec x\tan x\,dx=du$

dönüşümü yapılır

$$\int \sec^2 x.\sec x.\tan x.dx=\int u^2.du$$

$$=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sec^3 x}{3}+c$$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

I. Tip Genellestirilmis İnt.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{x\,dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{x\,dx}{1+x^2}+\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\left.\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right|_{b}^{0}+\lim_{a\to\infty}\left.\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right|_{0}^{a}=\underbrace{\lim_{b\to-\infty}-\frac{\ln(1+b^2)}{2}}_{-\infty}+\underbrace{\lim_{a\to\infty}\frac{\ln(1+a^2)}{2}}_{+\infty}$$

ıraksaktır