TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, GÜZ DÖNEMİ 2014-2015
MAT 101, MATEMATİK I, ARA SINAV
13 KASIM 2014

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

Adı Soyadı: No: İMZA:

1. (10+10 p.)	**2.** (10+10 p.)	**3.** (10+10+10 p.)	**4.** (6x5 p.)	**TOPLAM**

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 100 dakikadır. Başarılar.

1. (a) $y = \cos^5\left(x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{2}\right) + 3^{x^2} + \ln(2x+7) + e^{\pi}$ olmak üzere $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} = ?$

Çözüm

$\frac{dy}{dx} = -5\cos^4(x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2})\sin(x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2})(1 - \frac{1}{x^2}) + 3^{x^2}2x\ln 3 + \frac{2}{2x+7}$

$\frac{dy}{dx}|_{x=2} = -(1 - \frac{1}{2^2})5\cos^4(2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2})\sin(2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) + 3^{2^2}4\ln 3 + \frac{2}{4+7} = 324\ln 3 + \frac{2}{11}$

(b) $y^2\sin x = x\sin(y^2)$ olmak üzere $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(\pi,\sqrt{\pi})} = ?$

Çözüm

$2y\frac{dy}{dx}\sin x + y^2\cos x = \sin(y^2) + x\cos(y^2)2y\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(y^2) - y^2\cos x}{2y\sin x - x\cos(y^2)2y} \to \frac{dy}{dx}|_{(\pi,\sqrt{\pi})} = \frac{\sin(\pi) - \pi\cos\pi}{2\sqrt{\pi}\sin\pi - \pi\cos(\pi)2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

2. (a) $\sqrt{9,2}$ sayısının yaklaşık değerini bir fonksiyonun lineer yaklaşımı veya diferansiyel yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm

$f(x) = \sqrt{x}$ olsun. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dir. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki lineer yaklaşımı
$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \cong f(x)$
dir. $x = 9,2$ ve $a = 9$ alınırsa
$f(9,2) = \sqrt{9,2} \cong f(9) + f'(9)(9,2-9) = 3 + \frac{0.2}{6} = 3.0333$
elde edilir.

(b) Bir karınca $t = 0$ anında düz bir yolda A noktasından 3 m/dk hızla kuzeye doğru yürümeye başlıyor. 2 dakika sonra, ikinci karınca A noktasından doğuya doğru 8 m/dk hızla yürümeye başlıyor. Birinci karınca toplam 12 m. yol aldığında, iki karınca arasındaki uzaklığın değişim hızı kaçtır?

Çözüm

Birinci karıncanın hızı $\frac{dx}{dt} = 3m/dk$, ikinci karıncanın hızı $\frac{dy}{dt} = 8m/dk$ dır.

İki karınca arasındaki mesafa z olsun. İkinci karınca, birinci karınca $6m$ yol aldığında haraket ettiğinden $z^2 = (x+6)^2 + y^2$ dir. Her iki tarafın t ye göre türevini alırsak
$2z\frac{dz}{dt} = 2(x+6)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$
Birinci karınca $12m$ yol aldığında(yani $t = 4$ anında), ikinci karınca harekete başlayalı $2dk$ olmuştur. Yani ikinci karınca $16m$ yol almıştır.

$t = 4$ anında $z^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow z = 20$ dir.

$2 * 20\frac{dz}{dt} = 2 * 12 * 3 + 2 * 16 * 8 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 8,2$ tür.

3. Aşağıdaki limitleri (eğer varsa) hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|2x+4|}{x^2-4}$

Çözüm

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{|2x+4|}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2^+} \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{|2x+4|}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{-2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2^-} \frac{-2}{x-2} = \frac{1}{2}$

Sağdan ve soldan limit farklı olduğundan limit yoktur.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{202\,(e^x - x - 1)}{x^2}$

Çözüm

$$\lim_{x \to 0} \frac{202(e^x - x - 1)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}\ L'hopital}{=} \lim_{x \to 0} \frac{202(e^x - 1)}{2x} \overset{\frac{0}{0}\ L'hopital}{=} \lim_{x \to 0} \frac{202e^x}{2} = 101$$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^{1/2}}$

Çözüm:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{1/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{+(1-\cos^2 x)^{1/2}}{(1-\cos x)^{1/2}}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{+(1-\cos x)^{1/2}(1+\cos x)^{1/2}}{(1-\cos x)^{1/2}} = \lim_{x \to 0^+} (1+\cos x)^{1/2} = \sqrt{2}$$

4. $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ olmak üzere

(a) f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
Çözüm:
$x^2 - 4 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 2$ olmalıdır.
Tanım kümesi $\Re \backslash \{-2, +2\}$ dir.

(b) f fonksiyonunun birinci türevini ve artan azalan olduğu aralıkları bulunuz.
Çözüm:
$f'(x) = \frac{x^2-4-x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-4-x^2}{(x^2-4)^2}$ dir.
Kritik noktaları bulalım.
$f'(x) = 0$ olacak şekilde $x \in \Re \backslash \{-2, +2\}$ yoktur. O halde kritik nokta yoktur. Ayrıca fonksiyonun türevini tanımsız yapan $x = \pm 2$ tanım kümesinde olmadığından kritik nokta değildir.
$\forall x \in \Re \backslash \{-2, +2\}$ için $-4 - x^2 < 0$ ve $(x^2-4)^2 > 0$ olduğundan $f'(x) < 0$ olur. Yani fonksiyon $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$ aralığında azalandır.

(c) f fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz ve bükeyliğini belirleyiniz.
Çözüm:
$f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^2 - (-4-x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = 2\frac{x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$ dir.
Büküm noktalarını bulalım.
$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x\left(x^2+12\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
$x = 0$ büküm noktasıdır.

x		-2		0		2	
$f''(x)$	-		+		-		+

$(-\infty, -2)$ ve $(0, 2)$ aralığında $f''(x) < 0$ olduğundan fonksiyon aşağı konkavdır. $(-2, 0)$ ve $(2, \infty)$ aralığında $f''(x) > 0$ olduğundan fonksiyon yukarı konkavdır.

(d) Eğer varsa f fonksiyonun yerel maksimum/minimum noktalarını ve büküm noktalarını bulunuz.
Çözüm:
Fonksiyon tanım kümesinde azalan olduğundan yerel maksimum/minimum noktası yoktur. $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ dir. O halde $x = 0$ fonksiyonun büküm noktasıdır.

(e) f fonksiyonunun asimtotlarını bulunuz.
Çözüm:

Yatay asimtotu(varsa) bulalım:
$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-4} \overset{\frac{\infty}{\infty}, L'hopital}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-4} \overset{\frac{\infty}{\infty}, L'hopital}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$
$y = 0$ yatay asimtottur.

Düşey asimtotu(varsa) bulalım.

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$

$x = 2$ ve $x = -2$ düşey asimtotlardır.

(f) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
Çözüm:

x		-2		0		2	
$f''(x)$	-		+		-		+
$f'(x)$	-		-		-		-
$f(x)$	Azalan, aşağı konkav		Azalan, yukarı konkav		Azalan, aşağı konkav		Azalan, yukarı konkav